PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO - 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “de una línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni de las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea el plano $\pi \equiv x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv x = y = z$. Se pide:

a) Calcular la distancia de la recta al plano.

b) Hallar un plano α que contenga a r y sea perpendicular a π.

c) Hallar el punto P’ simétrico de P(-1, 3, 3) respecto a π.

La recta y el plano, como es lógico, son paralelos (en caso contrario la recta sería secante al plano y la distancia sería cero), como vamos a comprobar, teniendo en cuenta que el vector normal de π, $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -2)$, y el vector director de r, $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 1)$ tienen que ser perpendiculares, para lo cual su producto escalar tiene que ser cero:

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow (1,\ 1,\ -2) \cdot (1,\ 1,\ 1) = 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \perp r,\ c.q.c.}$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de uno cualquiera de los puntos de la recta al plano; un punto de r es O(0, 0, 0).

Sabiendo que la distancia del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ al origen de coordenadas es $d(O,\ \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, la distancia pedida es la siguiente:

$$d(\pi,\ r) = d(O,\ \pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{6}}{6}\ unidades = d(\pi,\ r)}}$$

b)

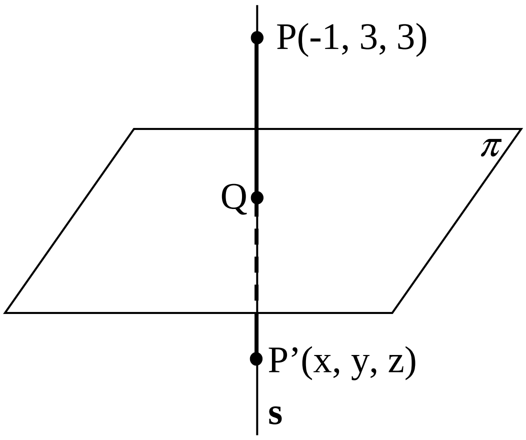
El plano α pedido, por contener a r contiene a todos sus puntos, por ejemplo al origen de coordenadas, y tiene como vectores directores al vector director de la recta r, $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 1)$ y al vector normal del plano π, $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -2)$:

$$\alpha(O;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -2x + y + z - z + 2y - x = 0\ ;;\ -3x + 3y = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv x - y = 0}}$$

c)

El punto simétrico de P(-1, 3, 3) con respecto al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 5 = 0$ se obtiene del modo siguiente:



Sabemos del apartado anterior que un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -2)$.

La recta s que pasa por el punto P(-1, 3, 3) y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano, y sus ecuaciones paramétricas son las siguientes: $s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$.

Un punto Q' genérico de la recta s tiene por expresión: $Q'(-1 + \lambda,\ 3 + \lambda,\ 3 - 2\lambda)$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y-2z-5=0 \\ \\ Q(-1+\lambda,\ 3+\lambda,\ 3-2\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow\ (-1+\lambda)+(3+\lambda)-2(3-2\lambda)-5=0\ ;;$$

$$-1+\lambda+3+\lambda-6+4\lambda-5=0\ ;;\ 6\lambda-9=0\ ;;\ 2\lambda-3=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{3}{2}}\ \Rightarrow\ \underline{Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ 0\right)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'}\ \Rightarrow\ Q-P=P'-Q\ ;;\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ 0\right)-(-1,\ 3,\ 3)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ 0\right)\ ;;$$

$$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ -3\right)=\left(x-\frac{1}{2},\ y-\frac{9}{2},\ z-0\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow x=2 \\ y-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow y=6 \\ z-0=-3\rightarrow z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{\underline{P'(2,\ 6,\ -3)}}.$$

****

2º) Sea la función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) Calcular el área de la región limitada por dicha gráfica, el eje OY y las recta x = -4 y x = -2.

----

a)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=\underline{\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=f'(x)}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo y el denominador es siempre negativo, la derivada es negativa para cualquier valor real de x perteneciente al dominio de la función, que es $D(f)\Rightarrow R-\{1\}$.

$$\underline{\underline{f(x)\ \ es\ \ decreciente\ \ en\ \ su\ \ do\min io}}$$

La anterior implica que <u>la función no tiene máximos y mínimos relativos</u>.

Para estudiar la concavidad de la función estudiamos la segunda derivada:

$$f''(x)=-\frac{2x\cdot(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=-\frac{2x^3-2x-4x^3-4x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\underline{\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=f''(x)}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{\underline{(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)\rightarrow f''(x)<0\ \Rightarrow\ Convexa\ \ (\cap)}}\\ \underline{\underline{(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)\rightarrow f''(x)>0\ \Rightarrow\ Cáncava\ \ (\cup)}}\end{cases}$$

Para estudiar los puntos de inflexión anulamos la segunda derivada:

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-4)^3}=0\ \Rightarrow\ \underline{x=0}$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente para asegurar que existe el punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para ese valor:

$$f'''(x)=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)^3-2x(x^2+3)\cdot 3\cdot(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6}=$$

$$=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)-12x^2(x^2+3)}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^4-6x^2+6x^2-6-12x^4-36x^2}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-6x^4-36x^2-6}{(x^2-1)^4}=\underline{\frac{-6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4}=f'''(x)}$$

$$f'''(0)=\frac{-6(+1)}{(-4)^4}=-\frac{6}{256}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Punto\ \ de\ \ \inf lexión\ \ en\ \ O(0,\ 0)}}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\underline{\underline{0=y}}\quad (Eje\ \ X)$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2-1=0\ \ ;;\ \ x^2=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x_1=1}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{x_2=-1}}$$

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

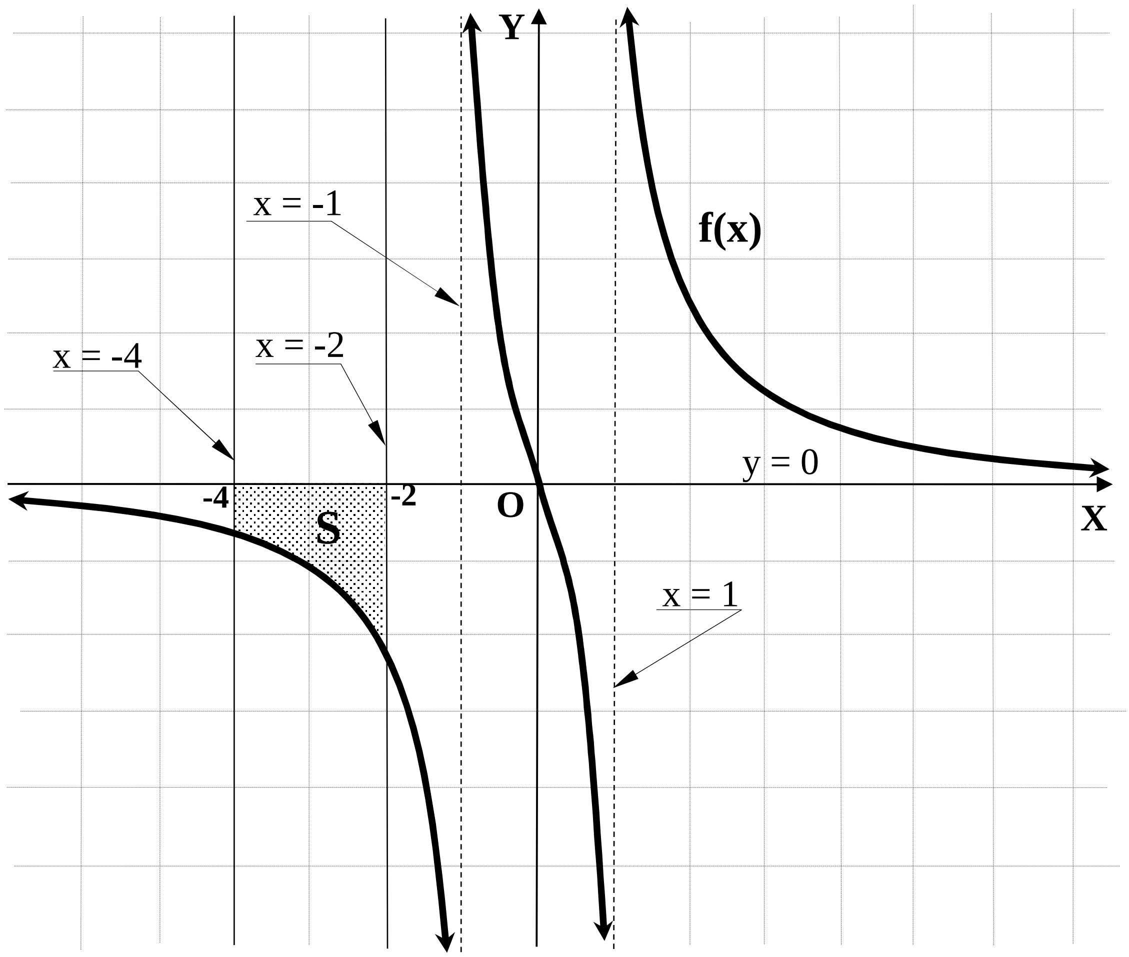
La represtación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.

b)

De la observación de la figura se deduce que la superficie pedida es la siguiente:

$$S=-\int_{-4}^{-2} f(x)\cdot dx=\int_{-2}^{-4} f(x)\cdot dx=\int_{-2}^{-4}\frac{x}{x^2-1}\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c} x^2-1=t \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\middle\|\begin{array}{c} x=-4\to t=15 \\ x=-2\to t=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ S=\frac{1}{2}\int_3^{15}\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}[Lt]_3^{15}=\frac{1}{2}(L15-L3)=\frac{1}{2}L\frac{15}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{2}L5\,u^2=S}}\,.$$


Y
f(x)
x = -1
x = -4
x = -2
y = 0
-4
-2
O
S
X
x = 1

****

CUESTIONES

1ª) Halla para qué valores de a es inversible la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y calcular la inversa para a = 0.

Para que una matriz tenga inversa (sea inversible) es necesario que su determinante sea distinto de cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-4-3a=0 \ ;; \ a^2-3a-4=0$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \Rightarrow \underline{a_1=4} \ ;; \ \underline{a_2=-1}$$

$$\underline{\underline{A \ \ es \ \ inversible \ \ \forall a\in R-\{-1, \ 4\}}}$$

Para a = 0 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa de A, utilizando el Método de Gaus-Jordan, es la siguiente:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc\|cc} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_4 \rightarrow \tfrac{1}{4}F_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc\|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

2ª) Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{L(1+0)} - \frac{1}{0} = \frac{1}{L1} - \frac{1}{0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x - L(1+x)}{x \cdot L(1+x)} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{1 \cdot L(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{L(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)L(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)L(1+x)+x} = \frac{0}{1 \cdot 0 + 0} =$$

$$= \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 \cdot L(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + 1} = \frac{1}{1 \cdot 0 + 1 + 1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

****

3ª) Halla el área del triángulo cuyos vértices son A(1, 1, 0), B(2, -1, 0) y C(2, 4, 0).

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ -1,\ 0) - (1,\ 1,\ 0) = (1,\ -2,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ 4,\ 0) - (1,\ 1,\ 0) = (1,\ 3,\ 0)$$

El área del triángulo que forman es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |\, 3k + 2k \,| = \frac{1}{2} \cdot |\, 5k \,| = \frac{1}{2} \cdot 5 = \underline{\underline{\frac{5}{2}\ u^2 = S}}$$

****

4ª) Demuestra que las curvas $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi,\ \frac{5\pi}{2}\right)$.

Considerada la función $h(x) = f(x) - g(x) = sen\ x - \frac{1}{x}$, continua y derivable en el intervalo $\left[2\pi,\ \frac{5\pi}{2}\right]$, por lo que puede aplicarse el Teorema de Bolzano.

$$\left.\begin{array}{l} h(2\pi) = sen\ (2\pi) - \frac{1}{2\pi} = 0 - \frac{1}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi} < 0 \\ \\ h\left(\frac{5\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \frac{2}{5\pi} = 1 - \frac{2}{5\pi} = \frac{5\pi - 2}{5\pi} > 0 \end{array}\right\}$$

Según el mencionado teorema, tiene que existir al menos un valor c perteneciente al intervalo para el cual el valor h(c) = 0, con lo cual se demuestra que las funciones dadas se cortan en un punto del intervalo dado, como se nos pedía demostrar.

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz $A\cdot B^T$ donde B^T indica la matriz traspuesta de B. ¿Es inversible?

b) Halla el rango de la matriz $A^T\cdot D$.

c) Calcula $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que verifique la ecuación $\left(A\cdot B^T+C\right)\cdot M=E$.

----

a)

$$A\cdot B^T=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&2&-2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}=A\cdot B^T}}$$

$$\left|A\cdot B^T\right|=\begin{vmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{vmatrix}=7\cdot2\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\underline{\underline{A\cdot B^T\ \ no\ \ es\ \ inversible}}$$

b)

$$A^T\cdot D=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=(0+4+6)=\underline{(10)=A^T\cdot D}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Rang\ \left(A^T\cdot D\right)=1}}$$

c)

$$\left(A\cdot B^T+C\right)\cdot M=E\ ;;\ \left[\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\ ;;$$

$$\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7x+2y-2z=2\\14x+5y-4z=5\\21x+6y-5z=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Re}\,solviendo\ \ por\ \ Cramer:$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&2&-2\\5&5&-4\\3&6&-5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{vmatrix}}=\frac{-2\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\5&5&4\\3&6&5\end{vmatrix}}{-7\cdot\begin{vmatrix}1&2&2\\2&5&4\\3&6&5\end{vmatrix}}=\frac{2(25+30+12-15-24-25)}{7(25+24+24-30-24-20)}=\frac{2(42-39)}{7(49-50)}=\underline{-\frac{6}{7}=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&3&-5\end{vmatrix}}{7}=\frac{-7\cdot\begin{vmatrix}1&2&2\\2&5&4\\3&3&5\end{vmatrix}}{7}=-(25+12+24-30-12-20)=-49+50=\underline{1=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}7&2&2\\14&5&5\\21&6&3\end{vmatrix}}{7}=\frac{7\cdot\begin{vmatrix}1&2&2\\2&5&5\\3&6&3\end{vmatrix}}{7}=3\cdot\begin{vmatrix}1&2&2\\2&5&5\\1&2&1\end{vmatrix}=3(5+8+10-10-10-4)=\underline{-3=z}$$

$$\underline{\underline{M=\begin{pmatrix}-\frac{6}{7}\\1\\-3\end{pmatrix}}}$$

****

2º) Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$, se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la primera derivada:

$$f(x) = x + e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} = 0 \;\;;;\;\; e^x - 1 = 0 \;\;;;\;\; e^x = 1 \;\;;;\;\; \underline{x = 0}$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es R y que el denominador de la derivada es positivo para cualquier valor real de x, se cumple que:

$$x < 0 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Decrecimiento: (-\infty,\ 0)}}$$

$$x > 0 \;\Rightarrow\; f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Crecimiento:\ (0,\ +\infty)}}$$

El único valor que anula la primera derivada es x = 0. El valor de la segunda derivada para este valor es el siguiente:

$$f''(x) = e^{-x} \;\Rightarrow\; f''(0) = e^{-0} = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo\ \ para\ \ x = 0}$$

$$f(0) = 0 + e^{-0} = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo:\ A(0,\ 1)}}$$

Teniendo en cuanta que:

$$f''(x) = e^{-x} > 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ es\ \ cóncava\ \ (\cup)\ en\ \ su\ \ dominio.}}$$

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

La función no puede tener asíntotas horizontales teniendo en cuenta que es continua en su dominio (R) y que tiene un mínimo absoluto, considerando sus periodos de crecimiento y decrecimiento.

Las asíntotas verticales son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función toma valor infinito, o sea, son los valores de x que anulan el denominador.

La función se puede expresar de la forma $f(x)=x+\frac{1}{e^x}=\frac{xe^x+1}{e^x}$. Como quiera que $e^x\neq 0,\ \forall x\in R$, la función no tiene asíntotas verticales.

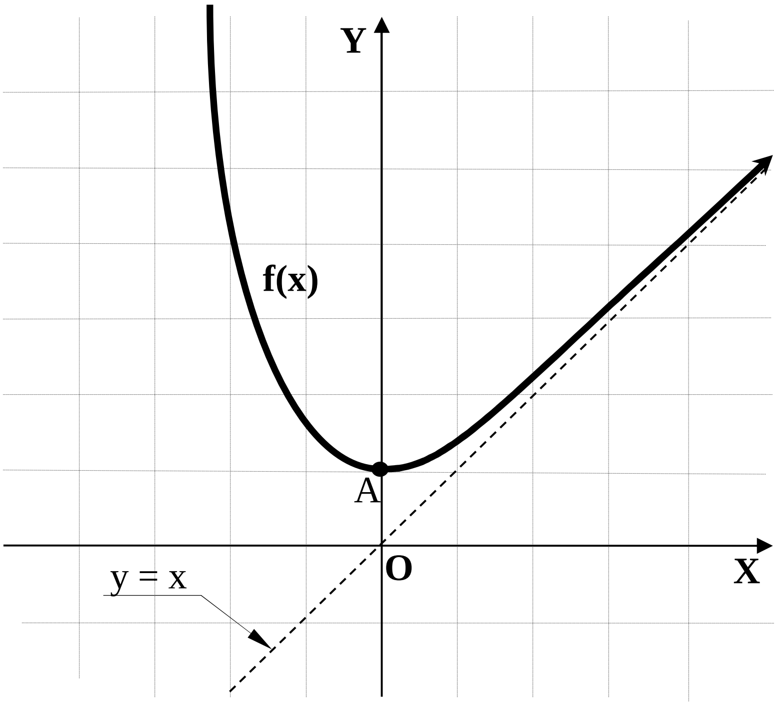
Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x+1}{xe^x}=\underline{1=m}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{xe^x+1}{e^x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x+1-xe^x}{xe^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^x}=\underline{0=n}$$

La función tiene como asíntota oblicua la recta y = x.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



b)

Siendo la función $h(x)=x+e^{-x}-4$, que es continua en su dominio, que es R, por serlo la función $f(x)=x+e^{-x}$ de la cual se diferencia la función h en una constante, le es aplicable el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo finito considerado.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $(-1,\ 5)$, comprobamos que:

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = -1 + e^{+1} - 4 = e - 5 < 0 \\ \\ h(5) = 5 + e^{-5} - 4 = 1 + \dfrac{1}{e^5} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists c \in (-1,\ 5) \Rightarrow h(c) = 0}$$

Lo anterior es equivalente a: $h(c) = c + e^{-c} - 4 = 0$;; $\underline{\underline{c + e^{-c} = 4,\ c.q.d.}}$

****

CUESTIONES

1ª) Halla a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} a+x\,L\,x & si\ \ x>0 \\ b & si\ \ x=0 \\ \dfrac{sen\,(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \end{cases}$ sea continua en todo R.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{sen\,(\pi x)}{x} = \underline{\pi}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (a + x\,L\,x) = a + 0 \cdot (-\infty) \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x \to 0} a + \lim_{x \to 0} (x\,L\,x) =$$

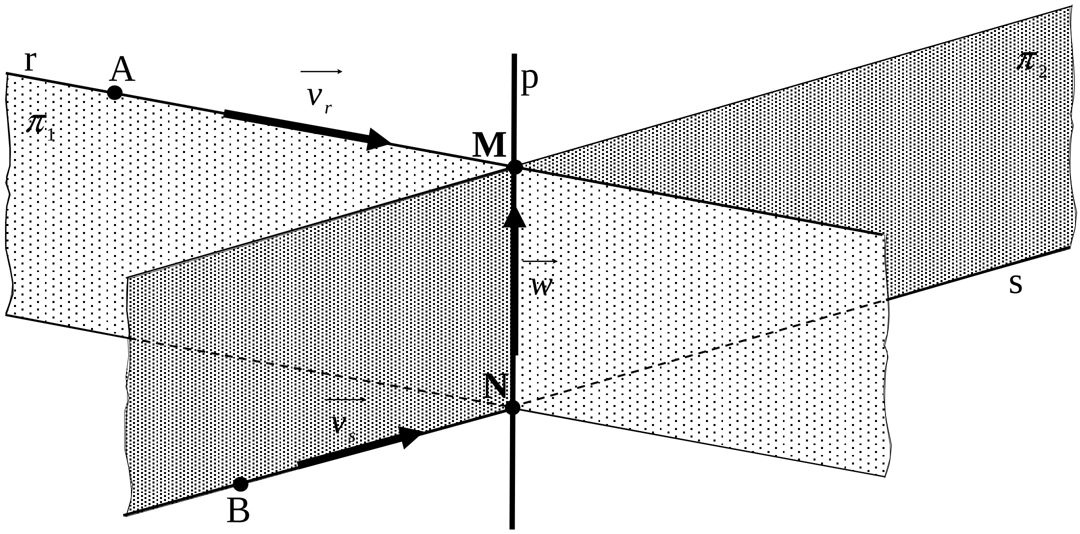
$$= a + \lim_{x \to 0} \frac{L\,x}{\frac{1}{x}} = a + \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow a + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = a - \lim_{x \to 0} x = \underline{a}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \underline{\underline{\pi = b = a}}$$

****

2ª) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$, halla un punto de cada una de ellas, de tal forma, que el vector que los una sea perpendicular a ambas.

En primer lugar vamos a determinar la recta p, perpendicular común a las rectas dadas, para lo cual nos guiamos por el siguiente gráfico.



Determinamos un punto y un vector director de cada una de las rectas dadas, para lo cual expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=\lambda \\ x+2y=7 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -x-y=-\lambda \\ x+2y=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y=7-\lambda}$$

$$x+y=\lambda \;\;;;\;\; x=-y+\lambda=-7+\lambda+\lambda=\underline{-7+2\lambda=x} \quad \Rightarrow \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x=-7+2\lambda \\ y=7-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son: $A(-7,\ 7,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(2,\ -1,\ 1)$.

Un punto y un vector director de s son: $B(2,\ -5,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s}=(0,\ 0,\ 1)$.

Un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es:

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-i-2j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w}=(-1,\ -2,\ 0)}$$

Ahora determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+7 & y-7 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -(y-7)-4z-z+2(x+7)=0\ ;;$$

$$-y+7-5z+2x+14=0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 2x-y-5z+21=0}$$

$$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -(y+5)+2(x-2)=0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv 2x-y-9=0}$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección: $\underline{p \equiv \begin{cases} 2x-y-5z+21=0 \\ 2x-y-9=0 \end{cases}}$.

El punto M es la intersección de la recta r y el plano π_2:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv 2x-y-9=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-7+2\lambda \\ y=7-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-7+2\lambda)-(7-\lambda)-9=0\ ;;\ -14+4\lambda-7+\lambda-9=0\ ;;$$

$$5\lambda-30=0\ ;;\ \lambda-6=0\ ;;\ \lambda=6 \Rightarrow \underline{\underline{M(5,\ 1,\ 6)}}$$

El punto N es la intersección de la recta s y el plano π_1:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x-y-5z+21=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2-(-5)-5\lambda+21=0\ ;;\ 4+5-5\lambda+21=0\ ;;$$

$$30-5\lambda=0\ ;;\ 6-\lambda=0\ ;;\ \lambda=6 \Rightarrow \underline{\underline{N(2,\ -5,\ 6)}}$$

El vector pedido es $\overrightarrow{NM} = M-N = (5,\ 1,\ 6)-(2,\ -5,\ 6) = \underline{\underline{(3,\ 6,\ 0) = \overrightarrow{NM}}}$

****

3ª) Discutir en función de a el sistema $\begin{cases} ax+ay=a \\ x-ay=1 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $M=\begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes es, en función de a, el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & -a \end{vmatrix}=-a^2-a=-a(a+1)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-1}.$$

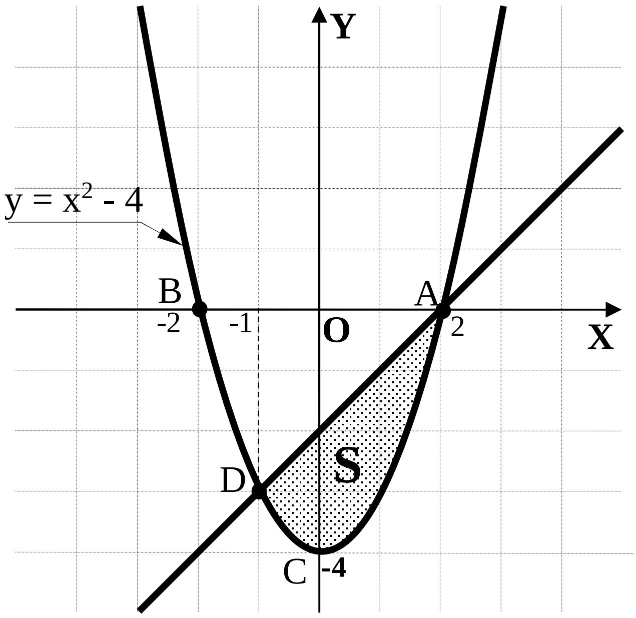
$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

$$\left.\begin{array}{l} Para\ \ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ Para\ \ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rang\ \ M'=1}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a=0 \\ a=-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

****

4ª) Halla el área del recinto limitado por la curvas $y = x^2 - 4$ e $y = x - 2$.



Los puntos de corte de la parábola con los ejes son los siguientes:

$Eje\ \ X \rightarrow y = 0\ ;;\ x^2 - 4 = 0\ ;;\ x^2 = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = -2 \Rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

$Eje\ \ Y \rightarrow x = 0\ ;;\ y = -4 \Rightarrow \underline{C(0,\ -4)}$

Los puntos de corte de la parábola y la recta son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4 \\ y = x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x^2 - 4 = x - 2\ ;;\ x^2 - x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{D(-1,\ -3)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se puede observar en el gráfico.

Teniendo en cuenta que las ordenadas de la parábola son mayores (en valor absoluto) que las de la recta (todas negativas) en el entorno de la superficie a calcular, el área es:

$$S = -\int_{-1}^{2} \left[\left(x^2 - 4\right) - (x - 2) \right] \cdot dx = \int_{2}^{-1} \left(x^2 - x - 2\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^{-1} =$$

$$= \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) \right] - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 8 - 3 - \frac{1}{2} =$$

$$= 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4'5\ u^2 = S}}$$

****