PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora no programable y no gráfica.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea a un parámetro real. Se considera el sistema $\begin{cases} x+ay+z=2+a \\ (1-a)x+y+2z=1 \\ ax-y-z=1-a \end{cases}$. Se pide:

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para a = 0.

c) Resolver el sistema para a = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1-a & 1 & 2\\ a & -1 & -1\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 2+a\\ 1-a & 1 & 2 & 1\\ a & -1 & -1 & 1-a\end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1-a & 1 & 2\\ a & -1 & -1\end{vmatrix}=-1-(1-a)+2a^2-a+2+a(1-a)=-1-1+a+2a^2-a+2+a-a^2=$$

$$=a+a^2=a(1+a)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=-1}.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 0\\ a\neq -1\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ Determinado}$$

$$Para\ \alpha=0\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \{F_1=F_2+F_3\}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{Para\ \ a=0\ \Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ Compatible\ Indeterminado}$$

$$Para\ \alpha=-1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ \ M'\ \Rightarrow\ \{C_1=C_3\}\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=2-2+1+1+1+4=7\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{Para\ \ a=-1\ \Rightarrow\ Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}$$

b)

Resolvemos para a = 0. El sistema resulta $\begin{cases}x+z=2\\ x+y+2z=1\\ -y-z=1\end{cases}$.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $z=\lambda$, resulta:

$$\begin{cases}x+z=2\\ -y-z=1\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{x=2-\lambda}\ ;;\ \underline{y=-1-\lambda}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=-1-\lambda\ ;\ \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

c)

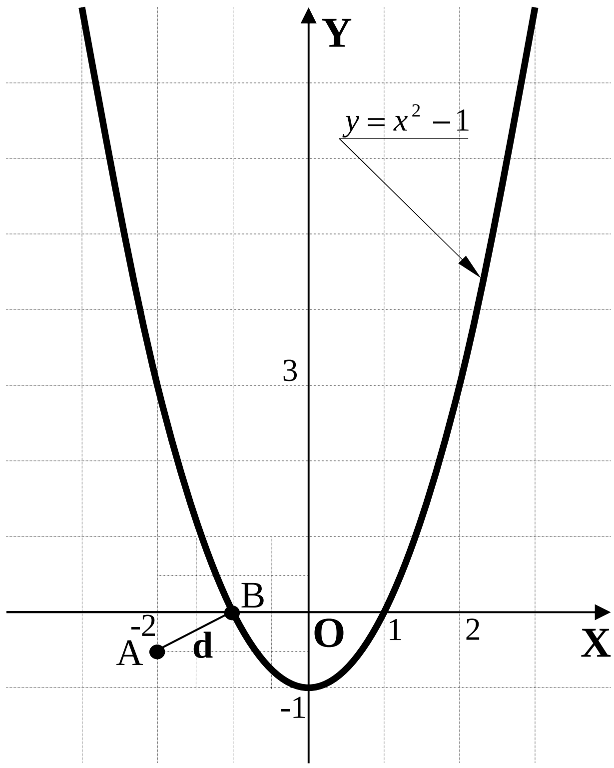
Resolvemos para a = 1. El sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Aplicando la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1\cdot(1+1)}=\frac{-3-1+6+1}{2}=\underline{\underline{\frac{3}{2}=x}} \quad ;; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{-1+6-1}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1-3+1}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}=z}}$$

****

2º) Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$, los que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)$.



Sea B un punto de la parábola que cumple la condición de estar lo más próximo posible al punto dado A.

El punto B por pertenecer a la curva $y = x^2 - 1$ es de la forma $B\left(x,\ x^2 - 1\right)$.

La distancia entre los puntos A y B tiene que ser mínima, por lo tanto, su derivada tiene que ser nula.

$$d = \overline{AB} = \sqrt{[x - (-2)]^2 + \left[x^2 - 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{4x + 4 + x^4 + \frac{1}{4}} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{4x^4 + 16x + 17} = d}$$

$$d' = \frac{1}{2} \cdot \frac{16x^3 + 16}{2\sqrt{4x^4 + 16x + 17}} = \frac{4x^3 + 4}{\sqrt{4x^4 + 16x + 17}} = 0 \Rightarrow 4x^3 + 4 = 0 \ ;; \ x^3 + 1 = 0 \ ;; \ \underline{x = -1}$$

Solamente un punto cumple la condición.

$$\underline{\underline{El \quad punto \quad pedido \quad es \quad B(-1,\ 0)}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Sea A una matriz 3 x 3 de columnas C_1, C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $2C_1 + 3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcular el determinante de B en función del de A.

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \;;;\; B = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & 2C_1 + 3C_3 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} C_1 + C_2 & 2C_1 + 3C_3 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & 2C_1 + 3C_3 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_2 & 2C_1 + 3C_3 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} C_1 & 2C_1 + 3C_3 & C_2 \end{vmatrix} + 0 \Rightarrow \left\{ vale\ \ cero\ \ por\ \ tener\ \ dos\ \ columnas\ \ iguales \right\} \Rightarrow$$

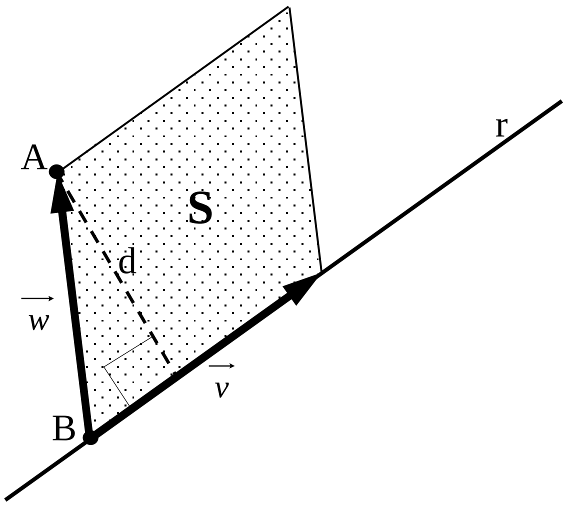
$$\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} C_1 & 2C_1 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & 3C_3 & C_2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} C_1 & 3C_3 & C_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Vale\ \ cero\ \ por\ \ tener\ \ dos \\ columnas\ \ proporcionales \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B| = 3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} cambia\ \ el\ \ signo\ \ por\ \ cambiar \\ dos\ \ columnas\ \ entre\ \ si \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|B| = -3 \cdot |A|}}$$

****

2ª) Hallar la distancia entre el punto A(2, 1, 4) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$.



Para una mejor comprensión de la fórmula de la distancia de un punto a una recta se ilustra con el gráfico adjunto.

El vector director de la recta es el siguiente: $\overrightarrow{v} = (2,\ 1,\ 3)$.

Un punto de r es B(1, -1, 0).

Los puntos B y A determinan el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BA} = A - B = (2,\ 1,\ 4) - (1,\ -1,\ 0) = (1,\ 2,\ 4).$$

El valor del área del paralelogramo es $S = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot d$.

Sabiendo que el módulo del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo que determinan, el valor del área también puede expresarse de la forma siguiente: $S = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right|$.

De las dos últimas expresiones se deduce: $\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot d = \left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right| \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

Aplicando la fórmula al punto A(2, 1, 4) y a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$:

$$d(A,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{\left|4i+3j+4k-k-8i-8j\right|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{\left|-2i-5j+3k\right|}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+3^2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{4+25+9}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{38}{14}} = \sqrt{\frac{19}{7}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{136}}{7}\ unidades = d(A,\ r)}}$$

****

3ª) Estudiar la continuidad en R de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$.

La función f(x) está definida y es continua para cualquier valor real de x, excepto para x = 0 que es dudoso y, por ello, se estudia a continuación.

$$Para \quad x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \\ \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-sen\ x}{1} = \dfrac{-0}{1} = \underline{0} \\ \\ \underline{f(0)=0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \ es \ continua \ para \ x=0}}$$

****

4ª) Calcular: $I=\int \frac{dx}{x(x+1)}$.

$$I=\int \frac{dx}{x(x+1)}=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\right)\cdot dx=\int \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)}\cdot dx=\int \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A+B=0 \\ \underline{A=1}\rightarrow \underline{B=-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}\right)\cdot dx=\int \frac{1}{x}\cdot dx-\int \frac{1}{x+1}\cdot dx=L|\,x\,|-L|\,x+1|+C=\underline{\underline{L\left|\frac{x}{x+1}\right|+C=I}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Se consideran las rectas el sistema $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Determinar la recta t que corta perpendicularmente a r y s.

c) Hallar la distancia entre r y s.

----

a)

Las ecuaciones de las rectas r y s, dadas por unas ecuaciones paramétricas son las siguientes: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 0)$ y uno de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (0,\ 1,\ 0)$.

Como quiera que los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes, las rectas r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso haremos lo siguiente: determinar un tercer vector, $\overrightarrow{w}$, que tenga como origen un punto de r, por ejemplo A(0, 1, 0) y por extremo un punto de s, por ejemplo, B(0, 0, 2):

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 0,\ 2) - (0,\ 1,\ 0) = (0,\ -1,\ 2).$$

Si el rango de $\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}$ es 3, r y s se cruzan y si el rango es 2, se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow Rango\ \ de\ \ [\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}] = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cruzan}}.$$

b)

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta p es el siguiente:

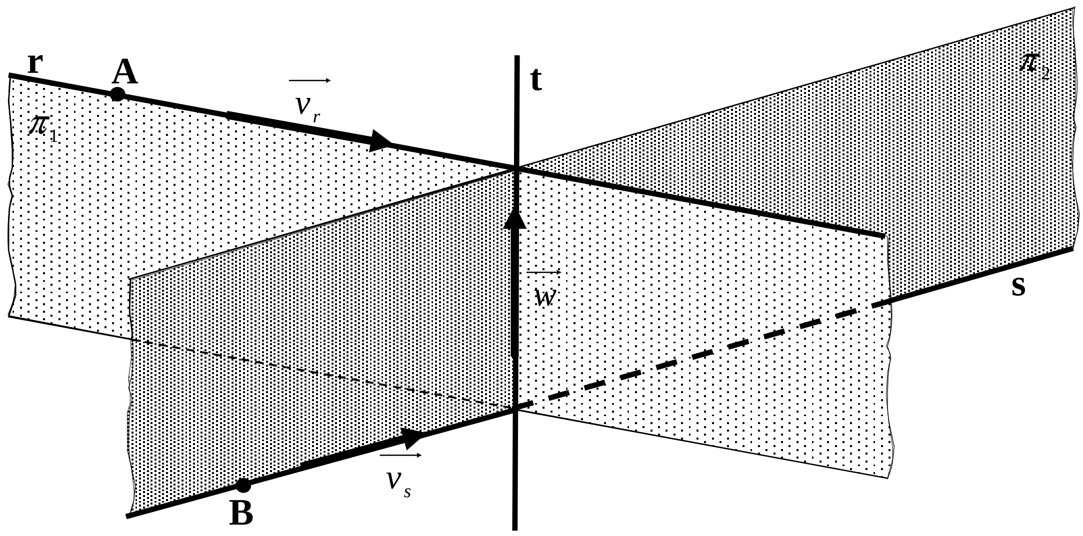
1.- Determinamos los planos $\pi_1\ \ y\ \ \pi_2$, de la forma siguiente:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ 2x - z - 2(y-1) = 0\ \ ;;\ \ 2x - z - 2y + 2 = 0\ \ ;;$$

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x - 2y - z + 2 = 0}$$

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2x = 0 \ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv x = 0}$$

La situación del problema se refleja en el gráfico adjunto.



La recta t pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}}}$$

c)

La distancia entre las rectas r y s es la longitud del segmento que determinan los puntos de corte de la recta t con cada una de las rectas r y s:

$$\left.\begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,\ 1,\ 0)} \ ;; \ \left.\begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(0,\ 1,\ 2)}.$$

$$d(r,\ s) = \overline{AQ} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{0+0+4} = \underline{\underline{2\ \ unidades = d(r,\ s)}}$$

****

2º) Sea $f(x)=2-x+Lx \quad con \quad x\in(0,\ +\infty)$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos , los intervalos de concavidad y convexidad y la asíntotas de f. Esbozar la gráfica de f.

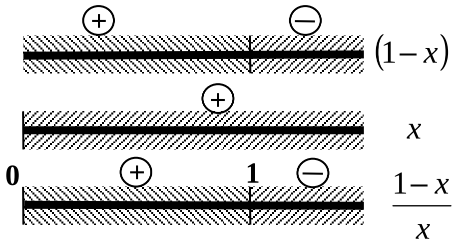
b) Probar que existe un punto $c\in\left[\frac{1}{e^2},\ 1\right]$ tal que $f(c)=0$.

----

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos , los intervalos de concavidad y convexidad y la asíntotas de f. Esbozar la gráfica de f.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f)\Rightarrow(0,\ +\infty)$ y sabiendo que una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x} \quad \Rightarrow$$



$$\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Creciente:\ f'(x)>0 \ \Rightarrow\ (0,\ 1)}}$$

$$\underline{\underline{Decreciente:\ f'(x)<0 \ \Rightarrow\ (1,\ +\infty)}}$$

Para que existan máximos o mínimos relativos es necesario que se anule la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{1-x}{x} \ ;; \ f'(x)=0 \ \Rightarrow\ \frac{1-x}{x}=0 \ ;; \ 1-x=0 \ ;; \ \underline{x=1}$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente; para diferenciar el máximo del mínimo relativo se recurre a la segunda derivada: según que sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo o un máximo, respectivamente.

$$f''(x)=\frac{-1\cdot x-(1-x)\cdot 1}{x^2}=\frac{-x-1+x}{x^2}=\frac{-1}{x^2}=f''(x) \ ;; \ \underline{f''(x)<0,\ \forall x\in D(f)}.$$

Para x = 1 la función tiene un máximo relativo. En este caso, por tratarse de una función continua en su dominio, el máximo es absoluto.

$$f(1)=2-1+L1=1+0=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Máximo \ \ absoluto:\ P(1,\ 1)}}$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) según que la segunda derivada sea negativa o positiva, respectivamente.

Como quiera que $f''(x) < 0,\ \forall x \in D(f)$, la función es cóncava en su dominio.

Siendo $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2 - x + L\,x) = 2 - 0 - \infty = -\infty$, el eje de ordenadas es asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales por ser $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (2 - x + L\,x) = \infty - \infty \Rightarrow$

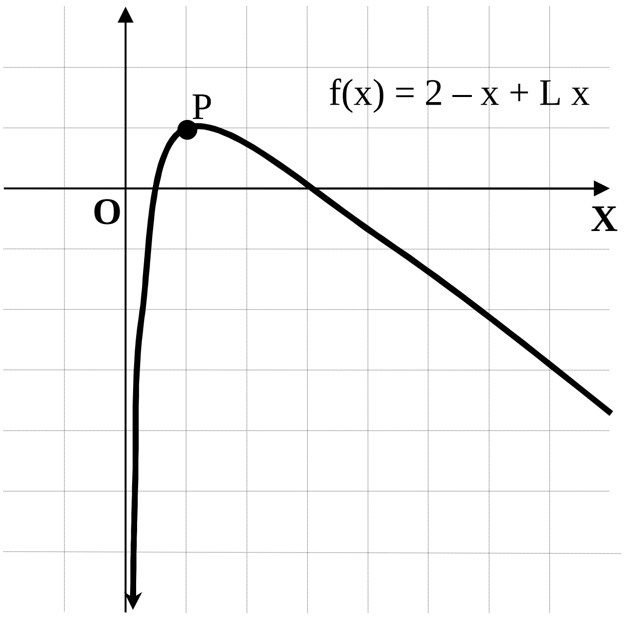
$$\Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{Lx}{\frac{-1}{x-2}} = -\lim_{x \to \infty} \frac{Lx}{\frac{1}{x-2}} = -\frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} = -\frac{\infty}{0} = -\infty.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser :

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - x + Lx}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{L\,x}{x} \right) = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Nota: Téngase en cuenta que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{L\,x}{x} = 1$.

Con los datos anteriores se puede esbozar la gráfica de f que es la siguiente:



b)

La función f(x) es continua en su dominio, por tanto lo es en todos los puntos de cualquier intervalo considerado que pertenezca a dicho dominio, y por lo tanto al intervalo considerado $c \in \left[\frac{1}{e^2},\ 1 \right]$.

El Teorema de Bolzano, que dice que: "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$":

$$f(x) = 2 - x + L\,x \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(\frac{1}{e^2}) = 2 - \dfrac{1}{e^2} + L\dfrac{1}{e^2} = 2 - \dfrac{1}{e^2} + L1 - 2\,L\,e = 2 - \dfrac{1}{e^2} + 0 - 2 = -\dfrac{1}{e^2} < 0 \\ \\ f(1) = 2 - 1 + L1 = 1 + 0 = 1 > 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{En\ \ efecto,\ \ \exists c \in \left[\frac{1}{e^2},\ 1\right]\ \ tal\ \ que\ \ f(c) = 0,\ \ c.\ q.\ d.}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Sea a un número real. Discutir el sistema $\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x + (a-1)y = 0 \end{cases}$, según los valores de a.

Se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) - 2 = a^2 - a - 2 = 0.$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1 = 2} \;;;\; \underline{a_2 = -1}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 2 \\ a \neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = 2 = n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

Solución trivial: x = y = 0

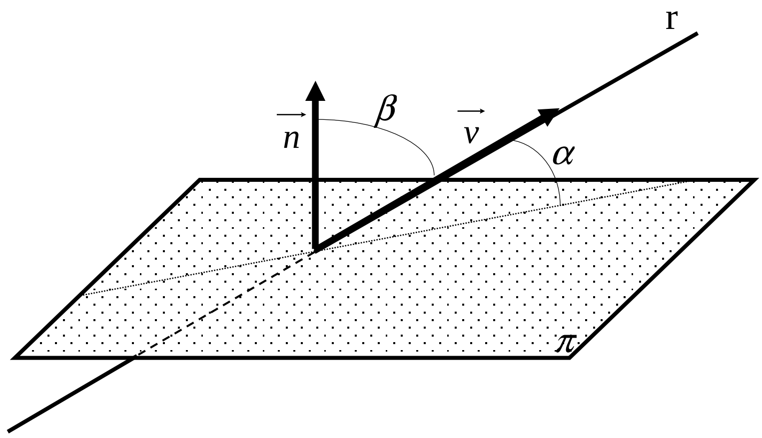
Para a = 2 el sistema resulta $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$, equivalente a $2x + y = 0$, cuyas soluciones son: $\underline{\underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in R}}$.

Para a = -1 el sistema resulta $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$, equivalente a $x - y = 0$, cuyas soluciones son: $\underline{\underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in R}}$.

****

2ª) Hallar el seno del ángulo formado por la recta $r \equiv \begin{cases} x = z \\ 2y + z = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y = z$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\overrightarrow{v}$ director de r y un vector $\overrightarrow{n}$, normal al plano π.

Para determinar un vector director de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = z \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \Rightarrow \underline{z = x = 3 - 2\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (-2,\ 1,\ -2)$ y un vector normal de $\pi \equiv x + y - z = 0$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -1)$.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} \qquad (*)$$

$$\cos \beta = sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(-2,\ 1,\ -2) \cdot (1,\ 1,\ -1)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{-2 + 1 + 2}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{9} = sen\ \alpha}} \Rightarrow \alpha = arc.\ sen\ \frac{\sqrt{3}}{9} = \underline{\underline{11^{o}\ 5'\ 45'' = \alpha}}$$

****

3ª) Calcular los valores del número real a sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8 \;\;;;\;\; \frac{e^0 - 1 - 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{a\,e^{ax} - a}{2x} =$$

$$= \frac{a\,e^0 - a}{0} = \frac{a-a}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{a^2\,e^{ax}}{2} = \frac{a^2 \cdot 1}{2} = \frac{a^2}{2} = 8 \;\;;;\;\; a^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \pm 4}}$$

****

4ª) Calcular: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}$.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9\left[1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2\right]}}=\int \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\frac{x-1}{3}=t\\ dx=3\,dt\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=arc\ sen\ t+C=\underline{\underline{arc\ sen\ \frac{x-1}{3}+C=I}}$$

****