PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora no programable y no gráfica.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Se considera el plano $\pi \equiv x + ay + 2az = 4$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$. Se pide:

a) Determinar los valores de a para los cuales la recta y el plano son paralelos.

b) Para a = 2, calcular la recta s que pasa por el punto P(1, 0, -1), es paralela al plano π y se apoya en la recta r.

----

a)

El sistema que forman la recta y el plano es $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ x + ay + 2az = 4 \end{cases}$. Para que la recta sea paralela al plano es necesario que no tengan ningún punto en común, o sea, que el sistema sea incompatible. Teniendo en cuenta que el rango de M es igual o mayor que 2, por existir el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, tendrá que ser Rango M = 2 y Rango M' = 3.

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2a \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & a & 2a & 4 \end{pmatrix}$.

$$Rango \;\; M = 2 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; 4a + 2a - 1 - 4 + a - 2a = 0 \;\;;;\;\; 5a - 5 = 0 \;\;;;\;\; \underline{a = 1}.$$

Para a = 1 es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y su rango es el siguiente:

$$Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 3 - 4 - 3 - 4 = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M' = 3}.$$

$$\underline{Para \;\; a = 1 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = 2 \;\;;;\;\; Rango \;\; M' = 3 \;\Rightarrow\; Sistema \;\; Incompatible.}$$

$$\underline{\underline{La \;\; recta \;\; r \;\; y \;\; el \;\; plano \;\; \pi \;\; son \;\; paralelos \;\; para \;\; a = 1}}$$

b)

Este apartado se puede resolver de diversas formas; una de ellas es la siguiente:

Para a = 2 es $\pi \equiv x + 2y + 4z - 4 = 0$ y $r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$.

El plano π', paralelo a π y que contiene al punto P(1, 0, -1), es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x + 2y + 4z + D = 0 \\ P(1,\; 0,\; -1) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + D = 0 \;\;;;\;\; 1 - 4 + D = 0 \;\;;;\;\; \underline{D = 3} \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \underline{\pi' \equiv x + 2y + 4z + 3 = 0}$$

El punto de corte de la recta r con el plano π' es la solución del sistema que forman: $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ x + 2y + 4z = -3 \end{cases}$. Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}}=\frac{16+12+3+12+4-12}{8+4-1-4+2-4}=\frac{35}{5}=\underline{7=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 4\end{vmatrix}}{5}=\frac{12-6-2-6-3-8}{5}=\underline{\frac{-13}{5}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}}{5}=\frac{-6+4+3-4-6+3}{5}=\underline{\frac{-6}{5}=z}$$

El punto de corte es $Q\left(7,\ -\frac{13}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$.

La recta s es la que pasa por los puntos P(1, 0, -1) y $Q\left(7,\ -\frac{13}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$, por lo tanto tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan:

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=\left(7,\ -\frac{13}{5},\ -\frac{6}{5}\right)-(1,\ 0,\ -1)=\left(6,\ -\frac{13}{5},\ -\frac{1}{5}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\overrightarrow{v}=(30,\ -13,\ -1)}$$

La recta s pedida es $\underline{\underline{s\equiv\begin{cases}x=1+30\lambda\\ y=-13\lambda\\ z=-1-\lambda\end{cases},\ \forall\lambda\in R}}$

****

2º) Sea la función $f(x)=\frac{L\,x}{x^2}$ con $x\in(0,\ +\infty)$. Se pide:

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) Calcular $\int f(x)\cdot dx$.

----

a)

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-L\,x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x-2x\,L\,x}{x^4}=\underline{\frac{1-2\,L\,x}{x^3}=f'(x)}$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, donde $x>0$, el denominador es siempre positivo, por lo cual el signo de la derivada depende únicamente del numerador, por lo tanto:

$$f'(x)<0\ \Rightarrow\ 1-2\,L\,x<0\ ;;\ L\,x>\frac{1}{2}\ ;;\ x>\sqrt{e}\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Decreciente\ \ para\ \left(\sqrt{e},\ +\infty\right)}}$$

$$f'(x)>0\ \Rightarrow\ 1-2\,L\,x>0\ ;;\ L\,x<\frac{1}{2}\ ;;\ x<\sqrt{e}\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Creciente\ \ para\ \left(0,\ \sqrt{e}\right)}}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{1-2\,L\,x}{x^3}=0\ ;;\ 1-2\,L\,x=0\ ;;\ L\,x=\frac{1}{2}\ ;;\ \underline{x=\sqrt{e}}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{2}{x}\cdot x^3-(1-2\,L\,x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-2x^2-3x^2+6\,L\,x}{x^4}=\underline{\frac{6\,L\,x-5}{x^4}=f''(x)}$$

$$f''\left(\sqrt{e}\right)=\frac{2\,L\sqrt{e}-3}{\left(\sqrt{e}\right)^3}=\frac{1-3}{e\sqrt{e}}=-\frac{2}{e\sqrt{e}}<0\ \Rightarrow\ \underline{M\acute{a}ximo\ \ para\ \ x=\sqrt{e}.}$$

$$f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{L\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M\acute{a}ximo\ \ absoluto:\ A\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2e}\right)}}$$

Las asíntotas horizontales son los valores reales que toma la función para los valores de x que tienden a más infinito o a menos infinito; teniendo en cuenta el dominio de la función, en este caso, la tendencia del límite es solamente para más infinito.

$$y=k=\lim_{x\to+\infty}\frac{L\,x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ Ind.\ \Rightarrow\ (L`Hopital)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{\infty}=\underline{0}$$

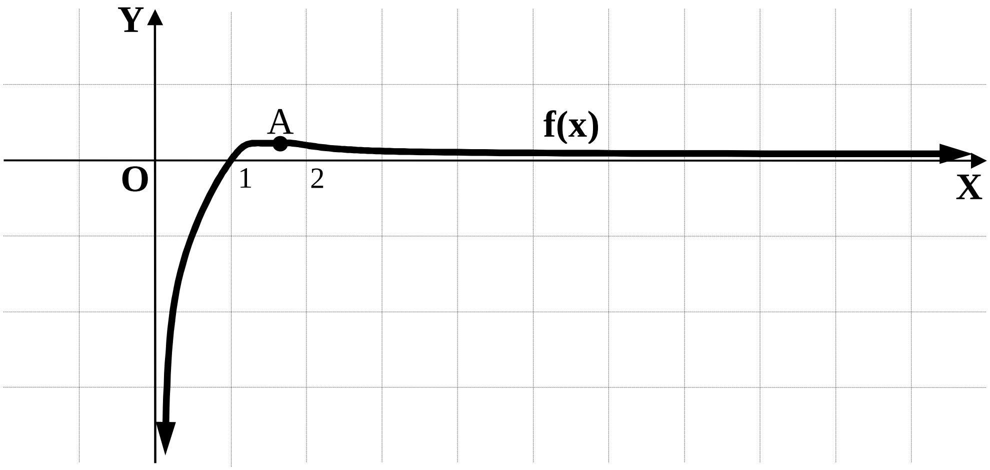
<u>El eje de abscisas es asíntota horizontal de la función.</u>

Asíntotas verticales son los valores reales que anulan el denominador; en este caso el valor que anula el denominador (x = 0) no pertenece al dominio de la función; sin embargo, el límite cuando $x \to 0^+$ es el siguiente: $\lim_{x \to 0^+} \frac{L\,x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$, lo que indica que:

<u>El eje de ordenadas es una asíntota vertical de la función.</u>

Por tener asíntotas horizontales no es posible que la función tenga asíntotas oblicuas.

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente.



b)

$$\int \frac{L\,x}{x^2} \cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} u = L\,x \;\to\; du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^{-2} \cdot dx \;\to\; v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; L\,x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= -\frac{L\,x}{x} + \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{L\,x}{x} + \int x^{-2} \cdot dx = -\frac{L\,x}{x} - \frac{1}{x} + C = \underline{\underline{-\frac{L\,x + 1}{x} + C}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(2x)}{x^3 + x^2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(2x)}{x^3 + x^2} = \frac{0^2}{0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2\,sen(2x) \cdot 2 \cdot \cos(2x)}{3x^2 + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\,sen(2x)\cos(2x)}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,sen(4x)}{3x^2 + 2x} = \frac{2 \cdot 0}{0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cos(4x)}{6x + 2} = \lim_{x \to 0} \frac{8\cos(4x)}{6x + 2} = \frac{8 \cdot 1}{0 + 2} = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$

****

2ª) Determina el valor de a para que la recta tangente a la función $f(x)=x^3+ax$ en el punto x = 0 sea perpendicular a la recta $r \equiv y+x=-3$.

La recta $r \equiv y+x=-3$ se puede expresar de la forma $r \equiv y=-x-3$, cuya pendiente es m = -1.

Las rectas perpendiculares tienen sus pendientes inversas y de signo contrario, por lo tanto, la pendiente que buscamos es $m'=1$.

La pendiente a una función en un punto es la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x)=3x^2+a \;\;\Rightarrow\;\; f'(0)=1=3\cdot 0^2+a=0+a \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a=1}}$$

****

3ª) Sean las matrices $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{pmatrix}$. Calcula la matriz A, sabiendo que se cumple que $A^2=B$ y $A^3=C$.

Existen diversas formas de resolver esta cuestión; una de ellas es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}A^2=B\\A^3=C\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A^3}{A^2}=\frac{C}{B} \;;;\; \frac{A^2\cdot A}{A^2}=\frac{C}{B} \;;;\; \underline{A=C\cdot B^{-1}} \qquad (*)$$

Determinamos ahora la inversa de B por el método de Gauss-Jordan:

$$(B/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 3 & 1 & 0\\3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_1\to\tfrac{1}{5}F_1\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0\\3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2\to F_2-3F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0\\3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2\to F_2-3F_1\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0\\0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2\to 5F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0\\0 & 1 & -3 & 5\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2\to F_2-3F_1\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -3\\0 & 1 & -3 & 5\end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}}$$

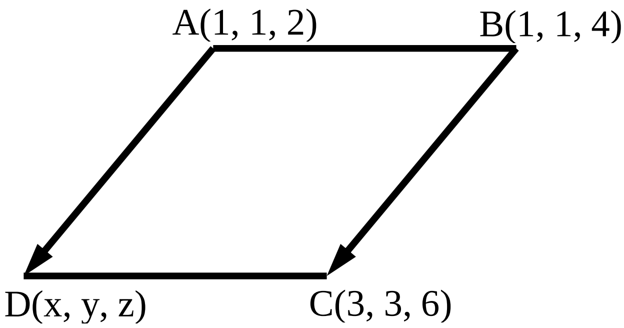
Sustituyendo en la expresión (*):

$$A=C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26-24 & -39+40\\16-15 & -24+25\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}}}$$

****

4ª) Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos A(1, 1, 2), $B(1,\ 1,\ 4)$ y C(3, 3, 6), hallar el área del mismo.

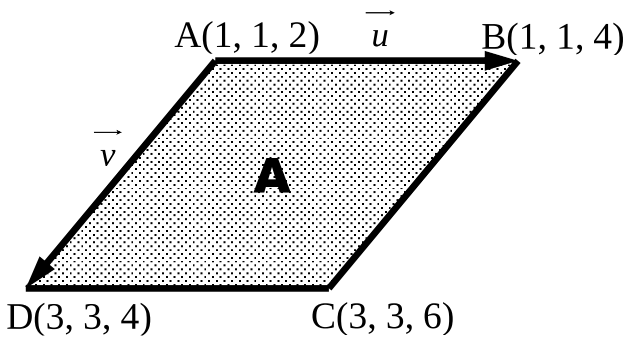


Por tratarse de un paralelogramo los lados son paralelos e iguales dos a dos y, en consecuencia, los vectores que determinan los vértices son iguales dos a dos, tal como se puede apreciar en la figura adjunta, o sea:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = D - A = (x,\ y,\ z) - (1,\ 1,\ 3) = (x-1,\ \ y-1,\ \ z-3) \\ \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (3,\ 3,\ 6) - (1,\ 1,\ 4) = (2,\ 2,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ y-1 = 2 \rightarrow y = 3 \\ z-2 = 2 \rightarrow z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(3,\ 3,\ 4)}$$

El área del paralelogramo puede obtenerse de diversas formas. Vamos a utilizar la siguiente: $\acute{A}rea = \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right|$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores que determinan las dimensiones del paralelogramo.



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 1,\ 4) - (1,\ 1,\ 2) = \underline{(0,\ 0,\ 2) = \vec{u}}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} = D - A = (3,\ 3,\ 4) - (1,\ 1,\ 2) = \underline{(2,\ 2,\ 2) = \vec{v}}$$

$$\acute{A}rea = \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = \left| 4j - 4i \right| = \left| 4i + 4j \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} =$$

$$= \underline{\underline{4\sqrt{2}\ u^2 \cong 5'66\ u^2 = \acute{A}rea}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ y+z=2a \\ x+2z=a^2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide:

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para a = 0.

c) Resolver el sistema para a = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2-1-1=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=2}.$$

Veamos el rango de M’:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}=a^2-2a+1=(a-1)^2 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=a^2+2a+1-4a=(a-1)^2 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2a \\ 0 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=-a^2-2+4a-a^2=-2(a-1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ \ M'=2} \\ \\ Para\ \ a\neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M'=3 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2<n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a \neq 1 \Rightarrow Rango \;\; M = 2 \;\; ;; \;\; Rango \;\; M' = 3 \;\; \Rightarrow \;\; Incompatible}}$$

b)

Para a = 0 el sistema es incompatible, según el apartado anterior.

c)

Para a = 1 el sistema es compatible indeterminado. El sistema es $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$.

Para resolverlo despreciamos una ecuación, por ejemplo la primera, y parametrizamos una de las incógnitas, por ejemplo z, con lo que la solución es la siguiente:

$$\underline{\underline{\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}, \;\; \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\ x^2}{x} & si\ \ x>0 \\ x^2-2x & si\ \ x\le 0 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f(x).

b) Calcular $I=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2\ \cdot\ f(x)\ dx$.

----

a)

La función f(x) está definida y es continua para cualquier valor real de x, excepto para x = 0 que es dudoso y, por ello, se estudia a continuación.

$$Para\ \ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x^2}{x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow \{L'Hopital\}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\ \cos\ x^2}{1}=\underline{0} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} (x^2-2x)=\underline{f(0)=0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{f(x)\ es\ continua\ \ para\ \ x=0}}$$

Veamos ahora si la función es derivable en todos sus puntos, o sea, si su derivada es una función continua, como se nos pide. La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor de x = 0, que es dudosa su derivabilidad.

Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x\ \cos\ x^2}{1} & si\ \ x<0 \\ 2x-2 & si\ \ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=-2 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{f'(0^-)\neq f'(0^+)}\ \Rightarrow$$

<u>La función f(x) no es derivable para x = 0.</u>

b)

$$I=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2\ \cdot\ f(x)\ dx=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2\ \cdot \dfrac{sen\ x^2}{x}\ dx=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\ \cdot\ sen\ x^2\ \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} x^2=t & x=\sqrt{2\pi}\to t=2\pi \\ x\ dx=\dfrac{1}{2}dt & x=\sqrt{\pi}\to t=\pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{2}\cdot\int_{\pi}^{2\pi} sen\ t\ \cdot dt=\frac{1}{2}\cdot[\cos\ t]_{\pi}^{2\pi}=\frac{1}{2}\cdot(\cos\ 2\pi-\cos\ \pi)=\frac{1}{2}\cdot[1-(-1)]=\underline{\underline{1=I}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Calcular las asíntotas de la función $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

Las asíntotas horizontales son los valores reales que toma la función para los valores de x que tienden a más infinito o a menos infinito.

$$y=k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}=1 \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ recta\ \ y=1\ \ es\ \ asíntota\ \ horizontal}}$$

Asíntotas verticales son los valores reales que anulan el denominador:

$$4x^2+1=0 \Rightarrow x\notin R \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)\ \ no\ \ tiene\ \ asíntotas\ \ verticales}}$$

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

La función f(x) no tiene asíntotas oblicuas.

****

2ª) Calcular el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Aplicando el procedimiento de Gauss:

$F_2 \to F_2 + F_1 \;\; ;; \;\; F_3 \to F_3 - 2F_1 \;\; y \;\; F_4 \to F_4 - 3F_1: \;\; M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \end{pmatrix}$.

Simplificamos las tres últimas filas: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Por ser $F_2 = -F_3 = -F_4$ la matriz es equivalente a $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2.

Rango M = 2

****

3ª) Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(1,\ 2)$.

Consideremos la función $f(x) = x^3 + x - 5$. Por tratarse de una función polinómica es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo cual, lo será en cualquier intervalo real que se considere.

Teniendo en cuenta que $f(1) = -3 \ \ y \ \ f(2) = 8 + 2 - 5 = 5$, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (1, 2) la función f(x) tiene, al menos, una raíz x = a, teniendo que ser 1 < a < 2 y tal que f(a) = 0.

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

Como el valor de la función tiene distinto signo para los valores extremos del intervalo considerado, según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (1, 2):

$$\underline{\underline{La\ \ ecuación\ \ x^3 + x - 5 = 0\ \ tiene\ \ al\ \ menos\ \ una\ \ solución\ \ en\ \ el\ \ intervalo\ \ (1,\ 2)}}\ \ \underline{c.q.d.}$$

****

4ª) Dada la recta $r \equiv 2x + y = 2$, calcula el punto P de la recta r tal que la perpendicular a r por P pase por el punto A(1, -1).

La recta $r \equiv 2x + y = 2$ puede expresarse de la forma $r \equiv y = -2x + 2$, donde se determina fácilmente su pendiente, que es m = - 2.

Sabiendo que dos rectas perpendiculares tienen las pendientes inversas y de signo contrario, la recta r' perpendicular a r por A(1, -1) es la siguiente:

$$r' \equiv y - (-1) = -\frac{1}{2}(x-1) \;\;;;\;\; y + 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \;\;;;\;\; 2y + 2 = -x + 1 \;\;;;\;\; \underline{r' \equiv x + 2y + 1 = 0}.$$

El punto P pedido es la intersección de las rectas r y r':

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv 2x + y - 2 = 0 \\ r' \equiv x + 2y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x - y + 2 = 0 \\ 2x + 4y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y + 4 = 0 \;\;;;\;\; \underline{y = -\frac{4}{3}}$$

$$x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = 0 \;\;;;\;\; x - \frac{8}{3} + 1 = 0 \;\;;;\;\; x = \frac{8}{3} - 1 = \underline{\frac{5}{3} = x}$$

$$\underline{\underline{P\left(\frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right)}}$$

****