PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora no programable y no gráfica.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea r la recta que pasa por los puntos A(1, 1, 1) y B(3, 1, 2), y sea s la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$. Se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Si fuera posible, calcular su punto de intersección.

c) Calcular, si existe, un plano que las contenga.

----

a)

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 1,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (2,\ 0,\ 1)$.

La recta r es: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2z - 2 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y - 1 = 0 \end{cases}}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad y\quad A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Según los rangos de A y A' pueden presentarse los casos siguientes:

Rango A = Rango A' = 2 $\rightarrow$ Coincidentes

Rango A = 2 ;; Rango A' = 3 $\rightarrow$ Paralelas

Rango A = Rango A' = 3 $\rightarrow$ Secantes

Rango A = 3 ;; Rango A' = 4 $\rightarrow$ Se cruzan

Teniendo en cuenta que en la matriz A tiene iguales las filas $F_1 = F_3$ y $F_2 = F_4$, su rango es 2.

Para determinar el rango de A' tenemos en cuenta que $F_2 = F_4$ y que $C_3 = -2C_1$:

$$Rango\ \ A' \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=3}$$

Según lo expresado anteriormente:

Las rectas r y s son paralelas.

b)

Las rectas paralelas no tienen punto de intersección.

c)

El plano π que contiene a las rectas r y s tiene como vector director el vector director de las rectas, que es $\overrightarrow{u}=(2,\ 0,\ 1)$; otro vector director del plano es cualquiera que tenga el origen en un punto de una recta y el extremo en otro punto de la otra recta.

Un punto de $s\equiv\begin{cases}x-2z=1\\ y-2=0\end{cases}$ es P(1, 2, 0) y otro vector director de π es:

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AP}=P-A=(1,\ 2,\ 0)-(1,\ 1,\ 1)=(0,\ 1,\ -1).$$

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \ ;; \ \ 2(z-1)-(x-1)+2(y-1)=0 \ \ ;;$$

$$2z-2-x+1+2y-2=0 \ \ ;; \ \ -x+2y+2z-3=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-2y-2z+3=0}}$$

****

2º) Sea la función $f(x) = \left| x^2 - x - 2 \right|$.

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad y esbozar su gráfica.

b) Demostrar que no es derivable en x = 2.

c) Calcular el área de la región limitada por dicha gráfica, el eje OX y las rectas x = - 2 y x = 0.

----

a)

Los puntos de corte con el eje OX de la función se obtienen igualándola a cero:

$$f(x) = \left| x^2 - x - 2 \right| = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;;;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = -1},\; \underline{x_2 = 2.}$$

Conocidos los puntos de corte, la función puede redefinirse de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & si \;\; x < -1 \\ -x^2 + x + 2 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ x^2 - x - 2 & si \;\; x > 2 \end{cases}, \text{ cuya derivada es } f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \;\; x < -1 \\ -2x + 1 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ 2x - 1 & si \;\; x > 2 \end{cases}.$$

Conviene observar que la derivada solamente puede anularse en el intervalo central, pues en los otros intervalos, los valores que anulan la derivada no pertenecen a esos intervalos.

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 1 = 0 \;;;\; \underline{x = \frac{1}{2} \in (-1,\; 2)} \;;;\; f''(x) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo relativo para } x = \frac{1}{2}}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 \right| = \left| \frac{1 - 2 - 8}{4} \right| = \left| -\frac{9}{4} \right| = \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo}: \; P\left(\frac{1}{2},\; \frac{9}{4}\right)}}$$

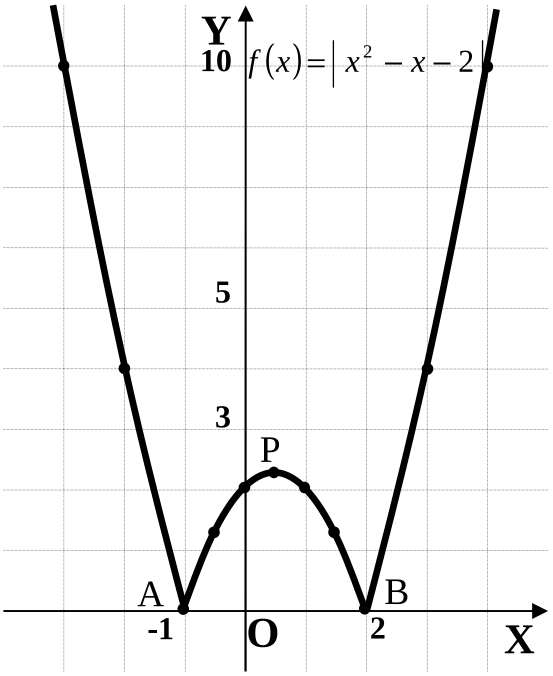
Los mínimos de la función son los puntos angulosos, que son los puntos de corte de la función con el eje X, o sea, son mínimos absolutos los puntos siguientes:

$$\underline{\underline{\textit{Mínimos absolutos}: \; A(-1,\; 0) \;\; y \;\; B(2,\; 0)}}$$

Sabiendo que una función es convexa $(\cup)$ cuando es positiva la segunda derivada y es cóncava $(\cap)$ cuando es negativa.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 > 0 & si \;\; x < -1 \\ -2 < 0 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ 2 > 0 & si \;\; x > 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\textit{Convexidad } (\cup) \Rightarrow (-\infty,\; -1) \cup (2,\; +\infty)}} \\ \\ \underline{\underline{\textit{Concavidad } (\cap) \Rightarrow (-1,\; 2)}} \end{Bmatrix}$$

La representación gráfica de la función es la que se muestra en la figura.



x	f(x)
0	2
-1	0
-2	4
-3	10
½	$\frac{5}{4}$
1	2
2	0
3	4
4	10

Para facilitar la representación gráfica, además de los puntos críticos y los periodos de concavidad y convexidad, se construye tabla de valores adjunta.

b)

Por la representación gráfica podemos observar que la función no es derivable en el punto B, (x = 2), sin embargo si es continua en este punto.

Como se nos pide, vamos a demostrar que la función no es derivable para x = 2:

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto; no se demuestra la continuidad por evidente, según la gráfica.

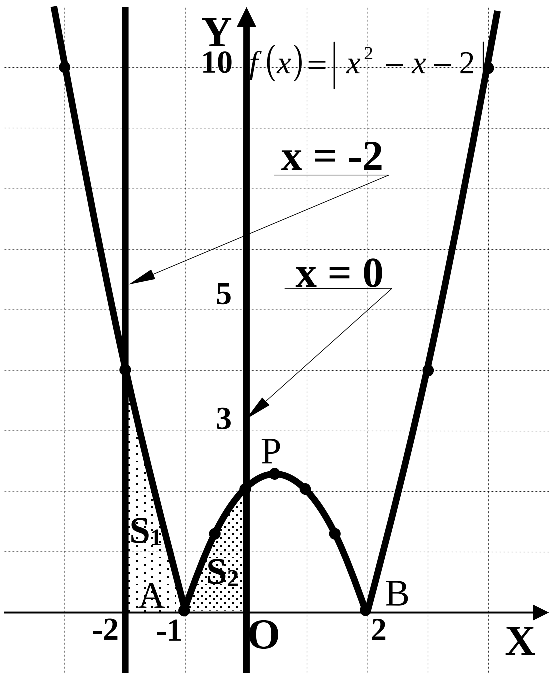
Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+1 & si\ \ -1\le x\le 2 \\ \\ 2x-1 & si\ \ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2^-)=-2\cdot 2+1=\underline{-3} \\ \\ f'(2^+)=2\cdot 2-1=\underline{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(2^-)\neq f'(2^+)}$$

<u>La función no es derivable para x = 2, como queríamos demostrar.</u>

c)

Dada la función de la forma $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & si\ \ x<-1 \\ -x^2+x+2 & si\ \ -1\le x\le 2 \\ x^2-x-2 & si\ \ x>2 \end{cases}$ podemos determinar el área pedida, observando la siguiente figura, considerando en cada intervalo la función correspondiente.



$$S_1=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-x-2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{-1}=\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2\cdot(-1)\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}-2\cdot(-2)\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+\frac{8}{3}+2-4=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=\frac{14-3}{6}=\underline{\frac{11}{6}\ u^2=S_1}$$

$$S_2=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}=0-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right]=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=$$

$$=\frac{-2-3+12}{6}=\underline{\frac{7}{6}\ u^2=S_2}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=\frac{18}{6}=\underline{\underline{3\ u^2=S}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Sea A una matriz cuadrada tal que $\det(A) = -1 \;\; y \;\; \det[(-2) \cdot A] = 32$. Calcular el tamaño de la matriz A.

Sea la matriz A es de orden n.

Teniendo en cuenta que si una matriz se multiplica por un número, todos los elementos de la matriz quedan multiplicados por ese número y que si una línea de un determinante se multiplica por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número, sería:

$$\det[(-2) \cdot A] = (-2)^n \cdot |A| = (-2)^n \cdot (-1) = 32 \;\; ;; \;\; (-2)^n = -32 = -2^5 = (-2)^5 \;\Rightarrow\; \underline{n = 5}$$

La matriz A tiene una dimensión de 5 x 5.

****

2ª) Calcular la matriz X que verifica $A \cdot X = B \cdot B^t$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Multiplicando por la izquierda por A^{-1}, queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \cdot B^t \;\;;;\;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot B \cdot B^t \;\;;;\;\; \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot B^t} \qquad (*)$$

Supongamos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; se tiene que cumplir que A · A^{-1} = I:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 2a+b & 2c+d \\ 3a-2b & 3c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2a+b=1 \\ 3a-2b=0 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} 2c+d=0 \\ 3c-2d=1 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2a+b=1 \\ 3a-2b=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4a+2b=2 \\ 3a-2b=0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow 7a=2 \;;;\; \underline{a=\frac{2}{7}} \;;;\; b=1-2a=1-\frac{4}{7}=\underline{\frac{3}{7}=b} \\ \left. \begin{array}{l} 2c+d=0 \\ 3c-2d=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4c+2d=0 \\ 3c-2d=1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow 7c=1 \;;;\; \underline{c=\frac{1}{7}} \;;;\; d=-2c=\underline{-\frac{2}{7}=d} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}$$

Sustituyendo en la expresión (*) y operando:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

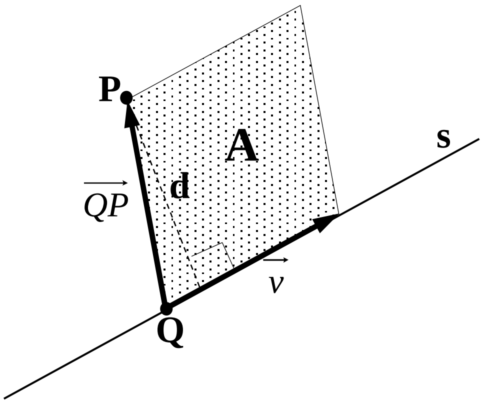
$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0+3 & 2-1 & 0+2 \\ 0-6 & 3+2 & 0-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0+1+0 & 9-1+4 \\ -0+5-0 & -18-5-8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & -31 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{12}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{31}{7} \end{pmatrix} = X}}$$

****

3ª) Halla la distancia desde el punto P(1, 3, -2) a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

La distancia del punto P a la recta s puede determinarse teniendo en cuenta que Q es un punto de s y $\overrightarrow{v}$ es el vector director de la recta (obsérvese la figura).



Teniendo en cuenta que $A = d \cdot \left| \overrightarrow{v} \right|$ y que también puede ser $A = \left| \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{QP} \right|$, se deduce que la distancia es: $d(P,\ s) = \dfrac{\left| \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{QP} \right|}{\left| \overrightarrow{v} \right|}$.

Un punto de r es $Q(2,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v} = (3,\ 1,\ -2)$ es un vector director de la recta s.

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1,\ 3,\ -2) - (2,\ -1,\ 1) = \underline{(-1,\ 4,\ -3) = \overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\ s) = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v} \right|}{\left| \overrightarrow{v} \right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\left| -8i - 9j - k - 12k + 3i - 2j \right|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{\left| -5i - 11j - 13k \right|}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 13^2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{25 + 121 + 169}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{315}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{315}{14}} = \sqrt{\frac{45}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{10}}{2}\ u = d(P,\ s)}}$$

****

4ª) Calcular $I=\int \frac{1}{1-x^2}\cdot dx$.

$$I=\int \frac{1}{1-x^2}\cdot dx=\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\cdot dx \Rightarrow \frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A+Ax+B-Bx}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\frac{(A-B)x+(A+B)}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A-B=0 \\ A+B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A=1\ ;;\ \underline{A=\frac{1}{2}}\ ;;\ \underline{B=\frac{1}{2}}$$

$$I=\int\left(\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}\right)\cdot dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\cdot dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\cdot dx=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2=\underline{\frac{1}{2}(I_1+I_2)=I} \qquad (*)$$

$$I_1=\int \frac{1}{1-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-x=t \\ dx=-dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot(-dx)=-\int \frac{1}{t}\cdot dt=-Lt=\underline{-L|1-x|=I_1}$$

$$I_2=\int \frac{1}{1+x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+x=t \\ dx=dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot dt=Lt+C=\underline{L|1+x|+C=I_2}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de I_1 e I_2, queda:

$$I=\frac{1}{2}\left[-L|1-x|+L|1+x|\right]+C=\frac{1}{2}\left[L|1+x|-L|1-x|\right]+C=\frac{1}{2}L\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C=\underline{\underline{L\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}+C=I}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-y=5 \\ \lambda y+z=\lambda \\ x-2z=3 \end{cases}$. Se pide:

a) Discutirlo en función del parámetro $\lambda \in R$.

b) Resolverlo cuando sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2\lambda-1=0 \ ;; \ 2\lambda+1=0 \ ;; \ \underline{\lambda=-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{Para \ \lambda \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow Rango \ M = Rango \ M' = 3 = n^o \ incógnitas \Rightarrow Compatible \ Determinado}$$

$$Para \ \lambda=-\frac{1}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Veamos cual es el rango de M' para $\lambda=-\frac{1}{2}$:

$$Rango \ M' \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot(3-1-5)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)=$$

$$=\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \ \lambda=-\frac{1}{2} \Rightarrow Rango \ M=2 \ ;; \ Rango \ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ aplicando la Regla de Cramer: $\begin{cases} x - y = 5 \\ \lambda y + z = \lambda \\ x - 2z = 3 \end{cases}$

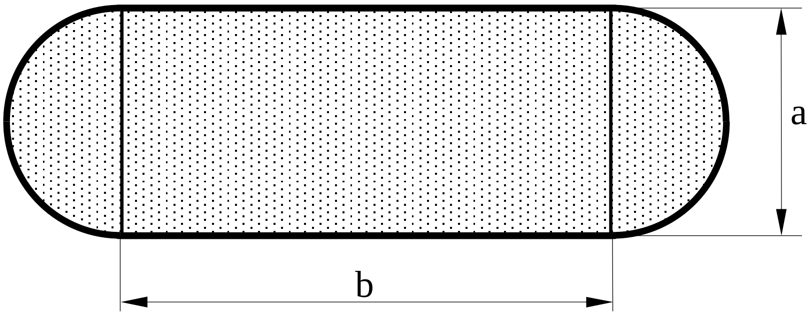
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2\lambda - 1} = \frac{-10\lambda - 3 - 2\lambda}{-2\lambda - 1} = \frac{-12\lambda - 3}{-2\lambda - 1} = \underline{\underline{\frac{3(4\lambda + 1)}{2\lambda + 1}}} = x \qquad ;;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-2\lambda - 1} = \frac{-2\lambda + 5 - 3}{-2\lambda - 1} = \underline{\underline{\frac{2\lambda - 2}{2\lambda + 1}}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2\lambda - 1} = \frac{3\lambda - \lambda - 5\lambda}{-2\lambda - 1} = \frac{-3\lambda}{-2\lambda - 1} = \underline{\underline{\frac{3\lambda}{2\lambda + 1}}} = z$$

****

2º) Un campo de atletismo de 400 metros de perímetro consiste en un rectángulo y dos semicírculos en dos lados opuestos, según la figura adjunta. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.



La superficie pedida es S = a · b, cuya derivada tiene que ser cero.

El perímetro equivale a la longitud de una circunferencia de radio a/2 , más 2b:

$$p = 2\pi \cdot \frac{a}{2} + 2b = 400 \;\;;;\;\; \pi a + 2b = 400 \;\;;;\;\; \underline{b = \frac{1}{2}(400 - \pi a)}.$$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la expresión del área:

$$S = a \cdot \frac{1}{2}(400 - \pi a) = \frac{1}{2}(400a - \pi a^2) \Rightarrow S' = \frac{1}{2}(400 - 2\pi a) = 200 - \pi a = 0 \;\;;;\;\; \underline{a = \frac{200}{\pi} \cong 63'66}$$

$$b = \frac{1}{2}(400 - \pi a) = \frac{1}{2}\left(400 - \pi \cdot \frac{200}{\pi}\right) = \frac{1}{2} \cdot 200 \;\;;;\;\; \underline{b = 100}$$

<u>Las dimensiones del rectángulo son 100 metros de largo por 63’66 metros de alto.</u>

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S'' = \frac{1}{2}(-2\pi) = -\pi < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Calcular la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 7x - z = -4 \end{cases}$ y $s \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\begin{cases} 3x - y = -1 \\ 7x - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \;;;\; \underline{z = 4 + 7\lambda} \;;;\; y = 1 + 3x = \underline{1 + 3\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4 + 7\lambda \end{cases}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1,\ 3,\ 7)$ y un director de s es $\overrightarrow{v} = (1,\ 3,\ 4)$.

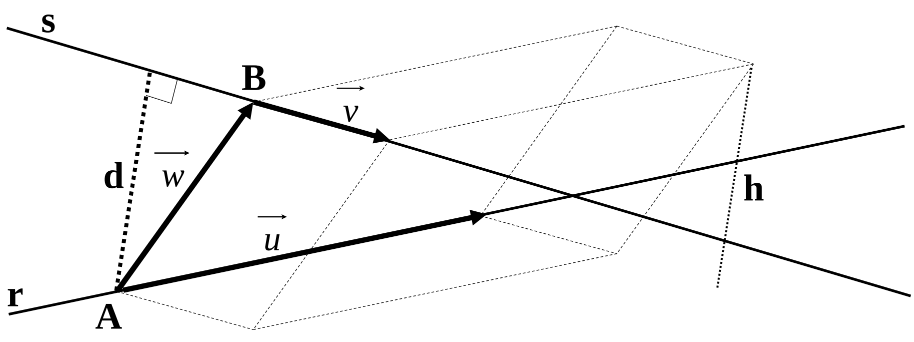
Como puede observarse, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cruzan o se cortan; para diferenciar el caso determinamos un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen un punto de r, A(0, 1, 4) y por extremo un punto de s, B(2, 2, 3): $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 4) = (2,\ 1,\ -1)$.

Las rectas se cruzan cuando los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ están en planos diferentes, por lo tanto, el rango de $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ tiene que ser 3; por el contrario, si se cortan, están en el mismo plano y el rango es dos:

$$Rango\ \ de\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 7 + 24 - 42 - 4 + 3 = 34 - 49 = -15 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango = 3}}$$

Las rectas r y s se cruzan. Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y el vector $\overrightarrow{w}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|}$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix}\right\|} = \frac{|-15|}{|12i + 7j + 3k - 3k - 21i - 4j|} = \frac{15}{|-9i + 3j|} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{(-9)^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{81+9}} = \frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{15}{3\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10}}{2}\ u = d(r,\ s)}}$$

****

2ª) Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Restando a cada fila la anterior, queda: $\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

$x+1+x+x=0 \;\; ;; \;\; 3x+1=0 \;\; ;; \;\; \underline{\underline{x=-\frac{1}{3}}}$

****

3ª) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{L\,x}{x}$ en su dominio de definición.

El dominio de la función $f(x)=\frac{L\,x}{x}$ es $(0,\ +\infty)$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-L\,x\cdot 1}{x^2}=\underline{\frac{1-L\,x}{x^2}}\ .$$

Como el denominador es positivo $\forall x\in D(f)$, para saber el signo de f'(x) basta con estudiar el numerador.

$$1-L\,x=0\ \ ;;\ \ L\,x=1\ \ ;;\ \ x=e\ \ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{\underline{x<e\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ Creciente:\ (0,\ e)}}\\ \\ \underline{\underline{x>e\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ Decreciente:\ (e,\ +\infty)}}\end{cases}$$

****

4ª) Calcular los valores de a para los cuales el área comprendida entre la gráfica de la función $y = -x^2 + a^4$ y el eje OX es de $\frac{256}{3}$ unidades de superficie.

Los puntos de corte con el eje OX de la función $y = -x^2 + a^4$ son los siguientes:

$$y = 0 \;\Rightarrow -x^2 + a^4 = 0 \;\;;;\;\; x^2 = a^4 \;\;;;\;\; x = \pm a^2 \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = -a^2} \;\;;;\;\; \underline{x_2 = -a^2}\,.$$

En el intervalo determinado por los puntos de corte, todas las ordenadas de la función $y = -x^2 + a^4$ son positivas, por lo cual:

$$S = \int_{-a^2}^{a^2} \left(-x^2 + a^4\right) \cdot dx = \frac{256}{3} \;\;;;\;\; \left[-\frac{x^3}{3} + a^4 x\right]_{-a^2}^{a^2} = \frac{256}{3} \;\;;;$$

$$\left[-\frac{\left(a^2\right)^3}{3} + a^4 \cdot a^2\right] - \left[-\frac{\left(-a^2\right)^3}{3} + a^4 \cdot \left(-a^2\right)\right] = \frac{256}{3} \;\;;;\;\; -\frac{a^6}{3} + a^6 - \frac{a^6}{3} + a^6 = \frac{256}{3} \;\;;;$$

$$2a^6 - \frac{2a^6}{3} = \frac{256}{3} \;\;;;\;\; 6a^6 - 2a^6 = 256 \;\;;;\;\; 4a^6 = 256 \;\;;;\;\; a^6 = 64 = 2^6 = (-2)^6$$

<u>Los valores de a que cumplen la condición pedida son 2 y -2.</u>

****