PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Calcular el área de la región finita y limitada por la gráfica de $f(x)=x^3-x+1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow m=f'(1)=3\cdot 1^2-1=3-1=\underline{2=m}.$$

El punto de tangencia es: $f(1)=1^3-1+1=1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 1)}$.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al caso que nos ocupa es:

$$t \equiv y-1=2(x-1)\ ;;\ y-1=2x-2 \Rightarrow \underline{Recta\ tangente: y=2x-1}.$$

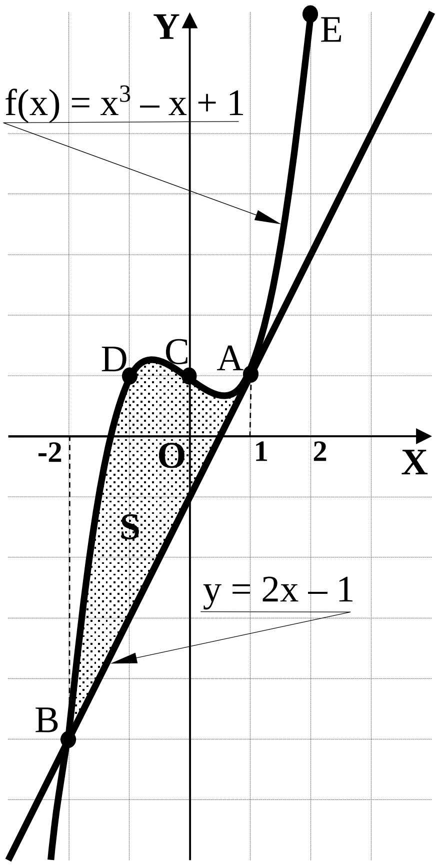
Los puntos de corte de la función y su tangente se obtienen de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) = x^3 - x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - x + 1 = 2x - 1 \;;;\; \underline{x^3 - 3x + 2 = 0}$$. Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Los puntos de corte son A(1, 1), que es el punto de tangencia, y B(-2, -5).

Como no hay más puntos de corte, las ordenadas del intervalo (1, -2) tienen que ser todas mayores en la función o en la tangente; para averiguarlo consideramos un valor sencillo del intervalo, por ejemplo, x = 0: f(0) = 1; y(0) = -1. Las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes a la tangente.



Otros puntos de la función son C(0, 1), D(1, 1) y E(2, 7).La representación gráfica de la situación, aproximadamente, es la que se indica en la figura adjunta.

El valor de la superficie pedida es:

$$S = \int_{-2}^{1} [f(x) - y] \cdot dx = \int_{-2}^{1} \left[\left(x^3 - x + 1\right) - (2x - 1)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1 - 6 + 32}{4}$$

.

****

2º) a) Estudiar si la función $f:[0,\ 2]\to R$ dada por $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & si\ \ 0\le x\le 1 \\ -\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x-1 & si\ \ 1<x\le 2 \end{cases}$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Enunciar dicho teorema.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-e^{-x}-x}{x\cdot sen\ x}$.

----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

La función f(x) es continua en $[0,\ 2]$, excepto para x = 1, cuya continuidad es dudosa, y que vamos a determinar a continuación.

Para que la función f(x) sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=1 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=f(1)=\underline{1} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x-1\right)=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}-1=\underline{1} \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{ f(x) es continua}$$

para x = 1.

f(x) es continua y derivable en $[0,\ 2]$ por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle en el intervalo considerado.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\sqrt{0}=0 \\ f(2)=-\frac{3}{2}\cdot 2^2+\frac{7}{2}\cdot 2-1=-6+7-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(0)=f(2)}.$$

<u>La función f(x) cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 2].</u>

b)

$$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-e^{-x}-x}{x\cdot sen\ x}=\frac{\cos 0-e^{-0}-0}{0\cdot sen\ 0}=\frac{1-1}{0\cdot 0}=\frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-2\,sen\,(2x)+e^{-x}-1}{1\cdot sen\ x+x\cdot\cos\ x}=\frac{-2sen\ 0+e^{-0}-1}{1\cdot 0+0\cdot 1}=\frac{-0+1-1}{0+0}=\frac{0}{0}\Rightarrow \mathit{In}\det.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos\,(2x)-e^{-x}}{\cos\ x+\cos\ x-x\,sen\ x}=\frac{-4\cdot 1-1}{1+1-0}=\underline{\underline{-\frac{5}{2}}}.$$

****

3º) a) Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$.

b) Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3 x 3 cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de 5B y el de B^2.

----

a)

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Restando a cada fila la anterior } \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ Restando de nuevo a cada fila la anterior } \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Rango\ \ A=2}}.$$

b)

Sabiendo que B es de dimensión 3 x 2 y que $|B|=4$:

$$|5B|=5^3\cdot|B|=125\cdot 4=\underline{500=|5B|}.$$

Se han tenido en cuenta las siguientes propiedades:

1ª . - Si una matriz se multiplica por un número, todos sus elementos quedan multiplicados por dicho número.

2ª . - Si una línea de un determinante (fila o columna) se multiplica por un número real, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$|B^2|=|B\cdot B|=|B|\cdot|B|=4\cdot 4=\underline{\underline{16=|B^2|}}.$$

Nos basamos en la propiedad que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

****

4º) a) Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} y-x=1 \\ z-2x=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-y=0$.

b) Hallar el plano α perpendicular a π que contiene a r.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 $\rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M' = 2 $\rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$Rango \;\; M \;\Rightarrow\; |M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M = 2}.$$

$$Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=3}$$

<u>La recta r y el plano π son paralelos.</u>

b)

El plano α, por ser perpendicular a π, tiene como vector director al vector normal de π, que es $\underline{\overrightarrow{n}=(1,\; -1,\; 0)}$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los planos que la determinan; es el siguiente:

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=i+2k+j=i+j+2k=\underline{(1,\ 1,\ 2)=\overrightarrow{v_r}}\ .$$

Un punto de r es: $r\equiv\begin{cases} y-x=1 \\ z-2x=0 \end{cases}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} y=x+1 \\ z=2x \end{array}\right\}\Rightarrow\ x=0\ \Rightarrow\ \underline{A(0,\ 1\ 0)}.$

La expresión general del plano α pedido es la siguiente:

$$\alpha\left(A;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v_r}\right)=\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2x+z+z-2(y-1)=-2x+2z-2y+2=0\,.$$

$$\underline{\underline{\alpha\equiv x+y-z-1=0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.

b) Esbozar su gráfica.

----

a)

Por tratarse de una función racional, su dominio de definición es R, excepto los valores de x que anulan el denominador. $D(f) \Rightarrow R-\{1\}$.

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot(x-1)-(x^2-3x+3)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=$$

$$=\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=f'(x)}.$$

El signo de f'(x) depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo para los valores de x pertenecientes al dominio de definición.

Las raíces del numerador son $x_1=0$ y $x_2=2$, que considerando el dominio de la función, lo dividen en los siguientes cuatro intervalos: $(-\infty,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 2)\ y\ (2,\ +\infty)$.

Los signos de la derivada en los anteriores intervalos son $(+),\ (-),\ (-)\ y\ (+)$, respectivamente, de donde se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$\underline{\underline{f'(x)>0 \Rightarrow Creciente \Rightarrow (-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)<0 \Rightarrow Decreciente \Rightarrow (0,\ 1)\cup(1,\ 2)}}$$

Los máximos y mínimos relativos son los valores que anulan la primera derivada, por tanto puede tener máximos y mínimos en los puntos de abscisas 0 y 2. Para que existan los máximos o mínimos es necesario que no se anule, para esos valores, la segunda derivada. Según que la segunda derivada sea negativa o positiva, el valor determina un máximo o un mínimo relativo, respectivamente.

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \underline{\frac{2}{(x-1)^3} = f''(x)}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x = 0}.$$

$$f(0) = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo: \ A(0,\ -3)}}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x = 2}.$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 3}{2-1} = \frac{4 - 6 + 3}{1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo: \ B(2,\ 1)}}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada.

Por ser $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow$ <u>No tiene puntos de inflexión.</u>

Las asíntotas son las siguientes:

<u>Asíntotas horizontales</u>: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = +\infty \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

<u>Asíntotas verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $\underline{\underline{x - 1 = 0}}$.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como ocurre en nuestro caso.

Son de la forma y = mx + n; los valores de m y n se obtienen como se indica a continuación:

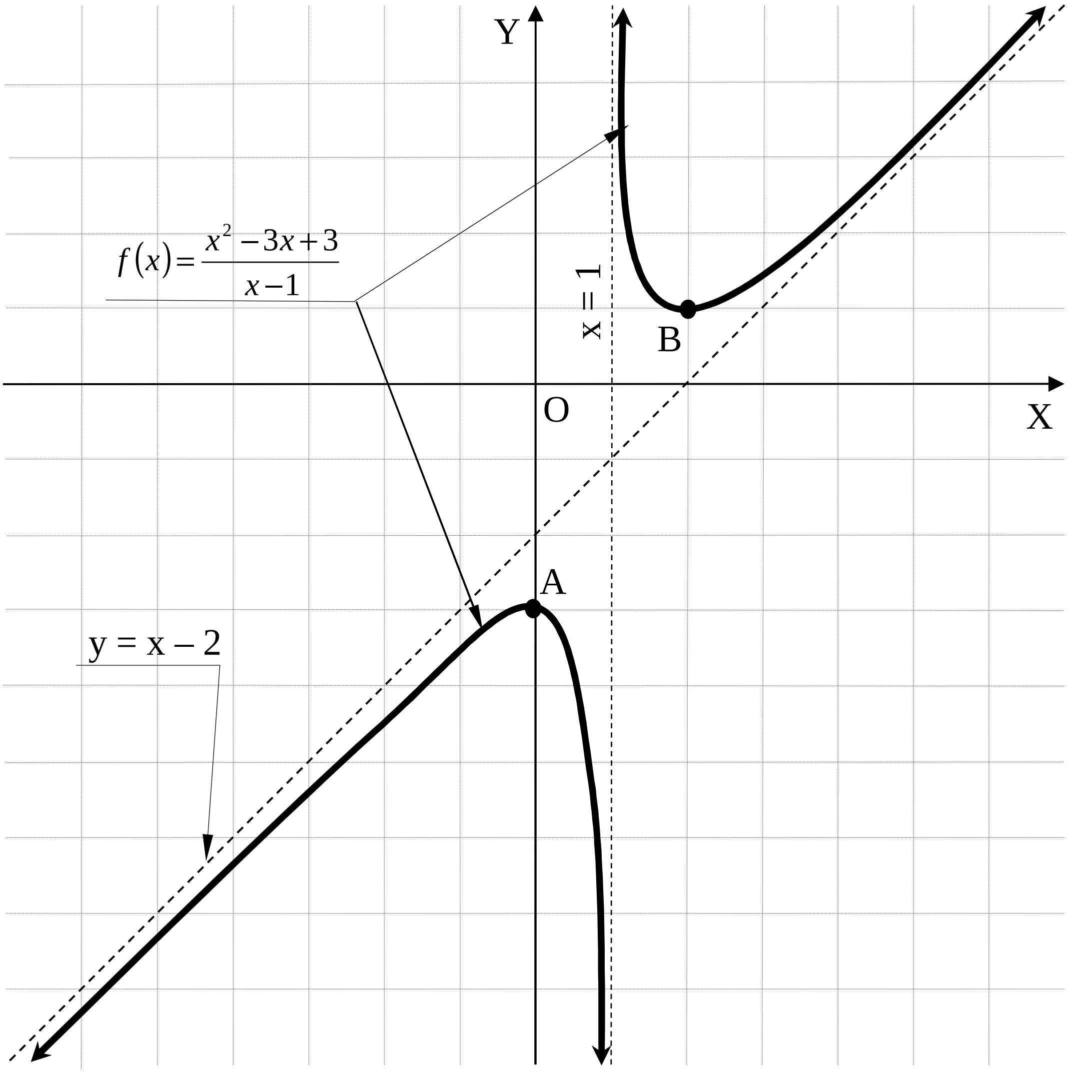
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = \underline{1 = m}.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 3 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x + 3}{x - 3} =$$

$= \underline{-2 = n} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Asíntota \;\; oblicua: \;\; y = x - 2}}$

b)

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

2º) a) Hallar el valor de los parámetros α y b para los que $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\ x - ax}{x^2} & si\ \ x>0 \\ x^2+b & si\ \ x\le 0 \end{cases}$ es continua en R.

b) Calcular $I=\int \frac{L\,x}{x^2}\cdot dx$.

----

a)

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=o \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ x-ax}{x^2}=\underline{0} \quad (*) \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+b\right)=f(0)=\underline{b} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(*) $$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x-ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det.\Rightarrow L\acute{}Hopital\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos\ x-a}{2x}=\frac{1-a}{0}.$$

Según los valores de α la expresión anterior tiene como valor ±∞ o es indeterminado para α = 1, que es lo lógico, ya que los parámetros dados son reales.

Para α = 1 el límite anterior continua de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\ x-1}{2x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det er.\Rightarrow L\acute{}Hopital\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-sen\ x}{2}=0.$$

Como tiene que ser $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, se deduce que b = 0.

<u>Para que f(x) sea continua en R tiene que ser α = 1 y b = 0.</u>

b)

$$I=\int\frac{L\,x}{x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L\,x=u\rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ \dfrac{1}{x^2}dx=dv\rightarrow v=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right\} \Rightarrow I=L\,x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{x}L\,x+\int\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{1}{x}L\,x+\int x^{-2}\,dx=-\frac{1}{x}L\,x+\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}L\,x-\frac{1}{x}+C=\underline{\underline{-\frac{1}{x}\left(L\,x+1\right)+C=I}}\ .$$

****

3º) Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \\ 3x+my+z=m+1 \end{cases}$, según los valores del parámetro m.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & m & 1 & m+1 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix}=-1+m-3+3+m-1=2m-2=0 \Rightarrow \underline{m=1}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m\neq 1 \Rightarrow Rango\;\; A=Rango\;\; A'=3=n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Determinado}}$$

$$Para\;\; m=1\;\; es\;\; A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; M' \Rightarrow \{C_2=C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2+1+3-2=0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; A'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m=1 \Rightarrow Rango\;\; A=Rango\;\; A'=2<n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Indeterminado}}$$

Resolvemos para m ≠ 1, que es compatible determinado, aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ m+1 & m & 1 \end{vmatrix}}{2m-2}=\frac{-1-(m+1)+(m+1)+m}{2(m-1)}=\frac{m-1}{2(m-1)}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 1 \end{vmatrix}}{2m-2}=\frac{(m+1)-3+(m+1)-1}{2(m-1)}=\frac{2m+2-4}{2(m-1)}=\frac{2m-2}{2(m-1)}=\frac{2(m-1)}{2(m-1)}=\underline{\underline{1=y}}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & m & m+1 \end{vmatrix}}{2m-2} = \frac{-(m+1)+m+3-(m+1)}{2(m-1)} = \frac{-2m-2+m+3}{2(m-1)} = \frac{1-m}{2(m-1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} = z}}.$$

Resolvemos ahora para m = 1, que es compatible indeterminado; es sistema resulta ser $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \\ 3x+y+z=2 \end{cases}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y parametrizando una variable, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1-\lambda \\ x-y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=1 \;;;\; \underline{x=\frac{1}{2}} \;;;\; y=1-\lambda-x=1-\lambda-\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{2}-\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall \lambda \in R}}$$

****

4º) a) Hallar la recta r que pasa por el punto A(1, -1, 0), está contenida en el plano $\pi \equiv x+y=0$, y corta a la recta $s \equiv x=y=z$.

b) Hallar la distancia del punto B(2, -2, 2) a la recta s.

----

a)

El plano $\pi \equiv x+y=0$ y la recta $s \equiv x=y=z$ son secantes por ser el vector normal del plano, $\vec{n}=(1,\ 1,\ 0)$, y el vector director de s, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, linealmente independientes y no ser perpendiculares.

De la observación de las ecuaciones del plano π y la recta s se deduce que su punto de corte es el origen de coordenadas.

La recta r pedida es la que pasa por los puntos O(0, 0, 0) y A(1, -1, 0), cuyo vector director es $\vec{w}=(1,\ -1,\ 0)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=0 \end{cases}}}$.

b)

La distancia del punto B(2, -2, 2) a la recta s viene dada por la siguiente fórmula: $d(B,\ s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$, siendo P un punto de la recta s y $\vec{v}$ un vector director de la recta s.

Un punto de la recta s es P(0, 0, 0) y un vector director de s es $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$.

$\overrightarrow{BP}=P-B=\underline{(-2,\ 2,\ -2)}$.

$$d(B,\ s)=\frac{\left|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\left|2i-2j-2k-2k+2i+2j\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\left|4i-4k\right|}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{4^2+(-4)^2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{4\sqrt{6}}{3}\ unidades=d(B,\ s)}}.$$

****