# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

# JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II                Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

## OPCIÓN A

1º) $a$) Discutir para qué valores de $a \in R$ la matriz $M = \begin{pmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcular $M^{-1}$ para $a = 0$.

$b$) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 y $|B| = -5$, calcular $|2B^t|$, donde $B^t$ denota la matriz traspuesta de B.

----------

$a$)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} -5 & a \\ 10 & -a-1 \end{vmatrix} = 5a + 5 - 10a = 0;\ \ 5 - 5a = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1}.$$

$$\underline{M\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1\}}.$$

Para $a = 0$ es $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad M^t = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad |M| = 5$.

$$Adj.\,de\ M^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

Se deben tener en cuenta las siguientes propiedades de las matrices y los determinantes:

1.- El determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta.

2.- El producto de un número real por una matriz es otra matriz cuyos elementos quedan todos multiplicados por dicho número.

3.- Si los elementos de una fila de un determinante se multiplican por un número real el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

$|2B^t| = 2^3 \cdot |B^t| = 8 \cdot (-5) = -40.$

$$\underline{|2B^t| = -40}.$$

**********

2º) $a$) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero de distinto sentido, que el vector $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

$b$) Calcular un punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ cuya distancia sea mínima al punto $A(-1, 2, 0)$.

----------

$a$)

El vector $\vec{u}$ pedido tiene las siguientes características:

$\vec{u} = (-2a, -a, 2a)$, con $a > 0$ y $|\vec{u}| = 4$.

$|\vec{u}| = \sqrt{(-2a)^2 + (-a)^2 + (2a)^2} = 4$; $\sqrt{4a^2 + a^2 + 4a^2} = 4$; $\sqrt{9a^2} = 4$;

$3a = 4 \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$.

$$\underline{\vec{u} = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)}.$$

$b$)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$.

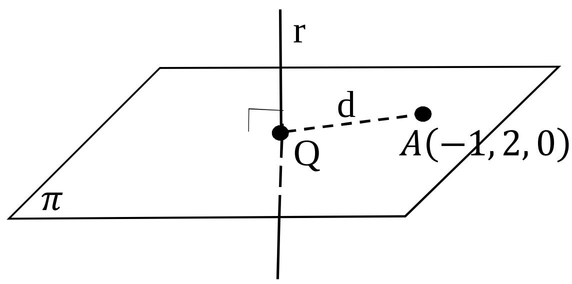
El haz de planos $\beta$ perpendiculares a r tiene la siguiente expresión dada en forma general o implícita: $\beta \equiv x - y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz $\beta$, el plano $\pi$ que contiene al punto $A(-1, 2, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x - y + 2z + D = 0 \\ A(-1, 2, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano $\pi$ es la solución del sistema que forman:




$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$1 - \lambda + 2 - \lambda + 6 - 4\lambda + 3 = 0$; $12 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \underline{Q(-1, 0, -1)}$.

La distancia entre A y r es la misma que la distancia entre A y Q:

$$d(A,r) = \overline{AQ} = \sqrt{(-1+1)^2 + (0-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{d(A,r) = \sqrt{5}\, unidades}.$$

**********

3º) $a$) Calcular $a, b\ y\ c$ para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto $P(1, 1)$ de su gráfica y, sin embargo, no tenga extremo relativo en dicho punto.

$b$) Probar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una única solución positiva.

----------

$a$)

Por pasar por $P(1, 1)$: $f(1) = 1 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b + c = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a + b + c = 0}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Por tener pendiente nula en $P(1, 1)$:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0;\ \ 3 + 2a + b = 0;\ \ \boldsymbol{2a + b = -3}$.

Por no tener extremo relativo en $P(1, 1)$ tiene que ser $f''(1) = 0$:

$f''(x) = 6x + 2a\ \Rightarrow\ f''(1) = 0\ \Rightarrow 6 + 2a = 0;\ \ 3 + a = 0\ \Rightarrow\ \underline{a = -3}$.

$2a + b = -3\ \Rightarrow 2 \cdot (-3) + b = -3;\ -6 + b = -3\ \Rightarrow\ \underline{b = 3}$.

$a + b + c = 0\ \Rightarrow\ -3 + 3 + c = 0\ \Rightarrow\ \underline{c = 0}$.

$b$)

Considerando la función $f(x) = x^5 + x - 1$, que por ser polinómica es continua y derivable en su dominio, que es R.

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, según el teorema de Bolzano, en el intervalo (0, 1) la función $f(x)$ tiene, al menos una raíz $x = a \in (0, 1)$, tal que $f(a) = 0$.

Vamos a demostrar ahora, como se pide, que la raíz es única.

Si la función $f(x)$ tuviera al menos otra raíz real positiva $x = b$, indicaría que $f(b) = 0$, con lo cual se podría aplicar el teorema de Rolle, teniendo en cuenta la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

Si $b > a$, tendría que existir un valor positivo c, tal que $a < c < b$, para el cual se anularía la primera derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como se demuestra a continuación, es imposible:

$f'(x) = 5x^4 + 1$ y siendo $c > 0$ es: $f'(c) \neq 0, \forall c \in R$, lo cual contradice el teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene una sola raíz positiva, $\underline{como\ se\ tenía\ que\ probar}$.

**********

4º) $a)$ Calcular $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

$b)$ Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas x = 1 y x = -1.

----------

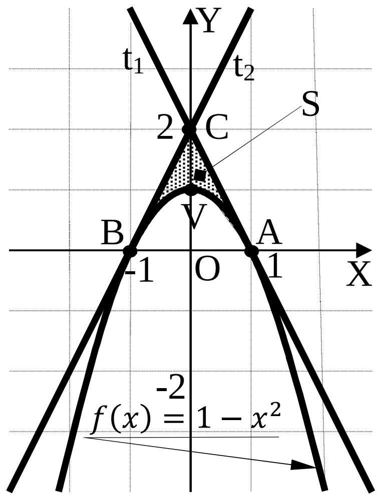
$a)$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{e^{0^+} - 1} = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} = \frac{1 - 1 - 0}{0 \cdot 0} =$$

$$= \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x \cdot e^x} = \frac{1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

$b)$




Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(1) = 1 - 1 = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{A(1, 0)}$.

$f(-1) = 1 - 1 = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{B(-1, 0)}$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = -2x \;\Rightarrow\; f'(1) = \boldsymbol{m_1} = \boldsymbol{-2}$.

$t_1 \;\Rightarrow y - 0 = -2 \cdot (x - 1) = -2x + 2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t_1 \equiv y = -2x + 2}$.

$f'(-1) = \boldsymbol{m_2} = \boldsymbol{2}$.

$t_2 \;\Rightarrow y - 0 = 2 \cdot (x + 1) = 2x + 2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t_2 \equiv y = 2x + 2}$.

Las dos tangentes pasan por el punto $C(0, 2)$.

El vértice de la parábola $f(x) = 1 - x^2$ es el siguiente:

$f'(x) = -2x = 0 \to x = 0 \;\Rightarrow V(0, -1)$.

La representación gráfica de la situación, aproximada, es la indicada en la figura adjunta.

Conviene observar la simetría con respecto al eje Y del conjunto.

De la observación de la figura se deduce al área a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [t_1 - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [(-2x + 2) - (1 - x^2)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (x^2 - 2x + 1) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) - 0\right] =$$

$$= \frac{16}{3} - 4 = \frac{16-12}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{4}{3}\ u^2}\ .$$

**********

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x+y+mz=2 \\ x+my+z=2m \\ x+y-mz=0 \end{cases}$.

$b)$ Resolverlo para m = 1.

----------

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 2 \\ 1 & m & 1 & 2m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $m$ es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+m+1-m^2-1+m=-2m^2+2m=$$

$$=-2m(m-1)=0 \;\Rightarrow\; m_1=0, m_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} m\neq 0 \\ m\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=0\ es\ A' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A'=3}.$$

$$\underline{Para\ m=0 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ m=1\ es\ A' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$\underline{Para\ m=1 \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $m=1$ el sistema es $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $y = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + z = 2 - \lambda \\ x - z = -\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 - \lambda;\ \left.\begin{array}{r} x + z = 2 - \lambda \\ -x + z = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow z = 1.$

$\underline{Para\ m = 1\ las\ soluciones\ son: x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 1, \forall\lambda \in R}.$

**********

2º) Consideremos las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

$a$) Comprobar que las rectas r y s se cruzan.

$b$) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s.

----------

$a$)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(0,0,1)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,2)$.    Recta s: $B(0,1,0)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (2,3,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (0,1,-1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 2 + 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan, como\ se\ quería\ comprobar}.$$

$b$)

En primer lugar determinamos un plano $\alpha$ que contiene a la recta r y pase por el origen:

El punto $A(0,0,1) \in r$ con el origen determina el vector $\overrightarrow{OA} = (0,0,1)$.

$$\alpha(O;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{OA}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha \equiv x - 2y = 0}.$$

Ahora determinamos otro plano $\beta$ que contiene a s y pasa por el origen:

El punto $B(0,1,0) \in s$ con el origen determina el vector $\overrightarrow{OB} = (0,1,0)$.

$$\beta\left(O;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\beta \equiv x - 2z = 0}.$$

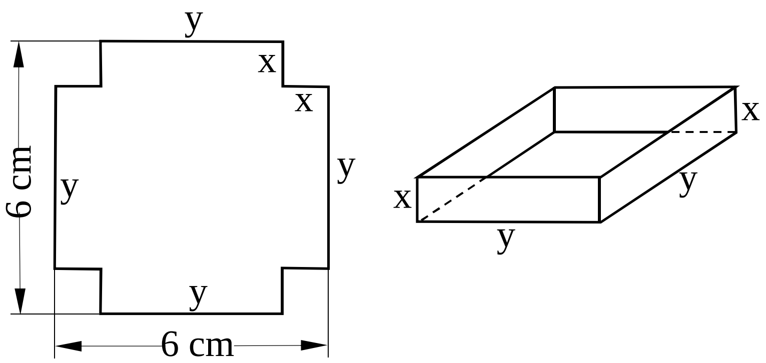
La recta t pedida, expresada por unas ecuaciones implícitas y también por unas ecuaciones paramétricas, es la que determinan los planos $\alpha\ y\ \beta$:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}} \ \Rightarrow\ y = z = \lambda, x = 2\lambda \ \Rightarrow\ \underline{t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R.}$$

**********

3º) Tenemos un cartón cuadrado de 6 cm de lado y queremos construir con él una caja sin tapa. Para ello recortamos un cuadrado de x cm de lado en cada vértice del cartón. Calcular x para que el volumen de la caja sea máximo.

----------




De la observación de la figura se deduce que: $y + 2x = 6 \rightarrow \boldsymbol{y = 6 - 2x}$.

$V = y^2 \cdot x \Rightarrow V(x) = x \cdot (6 - 2x)^2$.

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$V'(x) = 1 \cdot (6 - 2x)^2 + x \cdot [2 \cdot (6 - 2x)(-2)] = (6 - 2x)(6 - 2x - 4x) =$

$= 2(3 - x)(6 - 6x) = 12(3 - x)(1 - x) = 12(x^2 - 4x + 3)$.

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12(3 - x)(1 - x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 3}, \boldsymbol{x_2 = 1}$.

La solución $x = 3$ carece de sentido por ser imposible la construcción; se trata de un mínimo. La solución lógica de máximo es para $x = 1$. Se comprueba a continuación:

$V''(x) = 12(2x - 4) = 24(x - 2)$.

$V''(3) = 24(3 - 2) = 24 > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\textit{Mínimo para } x = 3}$.

$V''(1) = 24(1 - 2) = -24 < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\textit{Máximo para } x = 1}$.

$\underline{\textit{El volumen de la caja es máximo cortando un cm de cada esquina.}}$

**********

4º) $a)$ Calcular $\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)=Lx$, el eje OX y la recta $x=3$.

----------

$a)$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=1^\infty \Rightarrow Ind.del\ tipo \text{ nº e} \Rightarrow \left\{\alpha=\frac{1}{x}\left|\begin{matrix} x\to 0^+ \\ \alpha\to\infty\end{matrix}\right.\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\alpha\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}} =$$

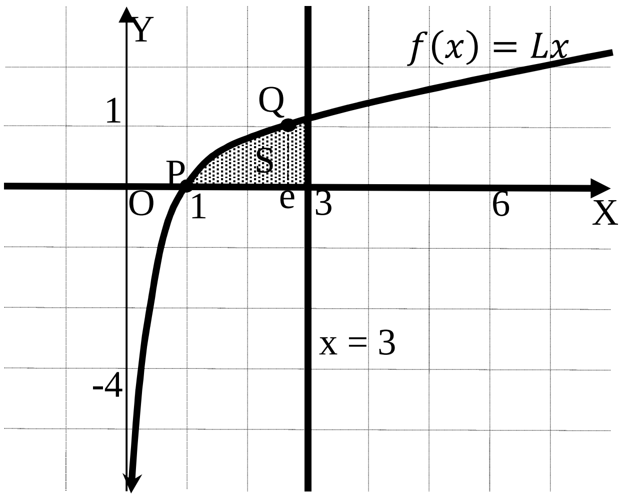
$$= \left[\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\alpha^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}} = e^0 = \underline{1}.$$

b)

La gráfica de la función $f(x)=Lx$ pasa por los puntos $P(1,0)$ y $Q(e,1)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que indica el gráfico adjunto.

De la observación de la gráfica se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:




$$S=\int_1^3 Lx\cdot dx \ \Rightarrow \left[\left\{\begin{matrix} u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv=dx\to v=x\end{matrix}\right\} \Rightarrow Lx\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]_1^3 =$$

$$=\left[Lx\cdot x-\int dx\right]_1^3=[x\cdot Lx-x]_1^3=(3\cdot L3-3)-(1\cdot L1-1)=3L3-3+1=$$

$$=3L3-2\cong 3{,}30-2=1{,}30.$$

$$\underline{S=(L27-2)\,u^2\cong 1{,}30\,u^2}.$$

**********