PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a, cuando M posee inversa.

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1}.

----

a)

Una función tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{6\}}.$$

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 54 \end{pmatrix}}.$$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) a) Consideremos los puntos $P(-1,-4,0), Q(0,1,3)$ y $R(1,0,3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R.

b) Halla a para que el punto $S(3,a,2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x+y-2z+5=0$.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q-P] = [(0,1,3)-(-1,-4,0)] = (1,5,3).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R-P] = [(1,0,3)-(-1,-4,0)] = (2,4,3).$$

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$15(x+1)+6(y+4)+4z-10z-12(x+1)-3(y+4)=0;$

$3(x+1)+3(y+4)-6z=0;\ \ (x+1)+(y+4)-2z=0.$

$$\underline{\pi \equiv x+y-2z+5=0}.$$

b)

El punto $S(3,a,2)$ pertenecerá al plano $\pi \equiv x+y-2z+5=0$ cuando satisfaga su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y-2z+5=0 \\ S(3,a,2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3+a-2\cdot 2+5=0;\ \ 8+a-4=0;$$

$4+a=0 \Rightarrow a=-4.$

$$\underline{El\ punto\ S\ está\ contenido\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ a=-4}.$$

****

3º) $a)$ Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ x^2 + ax, & si \quad x \geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$.

$b)$ Hallar a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b \cdot sen\, x + c$ verifique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para el valor $x = 0$ cuya continuidad se va a forzar, para lo cual, se va a de determinar el correspondiente valor de a.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + ax) = 0 = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x = 0, \forall a \in R$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

Se va a determinar ahora cuál o cuáles de los valores de a hacen derivable a la función para $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \ si\, x < 0 \\ 2x + a\ si\, x \geq 0 \end{cases}.$$

$f'(0^+) = 1$. $\qquad f'(0^-) = a$.

$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 1$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = 1}$.

$b)$

$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot sen\, 0 + c = 0;\ \ 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

$f'(x) = 2ax + b \cdot \cos x$.

$f'(0) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b \cdot \cos 0 = 1;\ \ 0 + b \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

$f''(x) = 2a - 1 \cdot \mathrm{sen}\, x = 2a - sen\, x$.

$$f''(0) = 2 \Rightarrow 2a - sen\, 0 = 2;\;\; 2a - 0 = 2;\;\; 2a = 2 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

****

4º) $a)$ Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$.

$b)$ Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2$.

$a)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = \frac{e^0 - e^{(0^2)}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2x \cdot e^{(x^2)}}{1} =$$

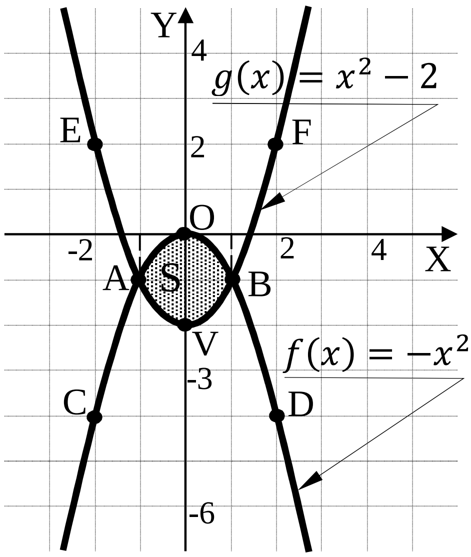
$$= \frac{e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^{(0^2)}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = 1.}$$

$b)$

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 = x^2 - 2; \;\; 2x^2 - 2 = 0; \;\; x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \to A(-1, -1) \\ x_2 = 1 \to B(1, -1) \end{cases}.$$



La parábola $f(x) = -x^2$, cuyo vértice es el origen, también tiene otros puntos, como por ejemplo, $C(-2, -4)\ y\ D(2, -4)$.

La parábola $g(x) = x^2 - 2$ tiene como vértice al punto $V(0, -2)$. Otros puntos de la parábola son $E(-2, 2)\ y\ F(2, 2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $f(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $g(x)$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{1} [-x^2 - (x^2 - 2)] \cdot dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2) dx =$$

$$= \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(2 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1^3}{3}\right) - \left[2 \cdot (-1) - \frac{2 \cdot (-1)^3}{3}\right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{12-4}{3} = \underline{\frac{8}{3}\ u^2 = S.}$$

****

5º) De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas.

$$P = P(BB) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\frac{1}{15} = 0,0667.}$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discutir, según el valor del parámetro m, el sistema $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$.

$b)$ Resolverlo para $m = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por existir el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2, \forall m \in R.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I. \forall m \in R.}$$

$b)$

Para $m = 1$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $y = \lambda$, resulta:

$$\left.\begin{matrix} x + z = -1 - \lambda \\ x + 2z = 1 - \lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -x - z = 1 + \lambda \\ x + 2z = 1 - \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = 2;\ x + 2 = -1 - \lambda;\ \ x = -3 - \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -3 - \lambda, y = \lambda, z = 2, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3,4)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$.

b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$ sean perpendiculares.

----

a)

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$ es $\vec{n} = (1,1,2)$, que también es vector director de la recta r pedida.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}}$.

b)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1,1,2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (a,2,3)$.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (1,1,2) \cdot (a,2,3) = 0;\ \ a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow a = -8.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ perpendiculares\ para\ a = -8.}$

****

3º) Consideremos la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{x^2+2\neq 0, \forall x\in R \Rightarrow D(f)\ \Rightarrow R}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y=1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x^2+2\neq 0, \forall x\in R \Rightarrow No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+2)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{2x\cdot(x^2+2-x^2-1)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x}{(x^2+2)^2}.$$

$$Para\ x>0 \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (0,+\infty)}.$$

$$Para\ x<0 \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: (-\infty,0)}.$$

Para que una función racional tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+2)^2}=0;\ \ 2x=0;\ \ x=0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

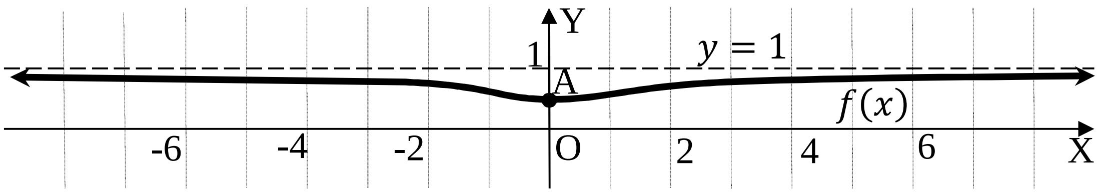
$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2+2)^2-2x\cdot[2\cdot(x^2+2)\cdot 2x]}{(x^2+2)^4}=\frac{2\cdot(x^2+2)-8x^2}{(x^2+2)^3}=\frac{2x^2+4-8x^2}{(x^2+2)^3}=\frac{4-6x^2}{(x^2+2)^3}=$$

$= \frac{2(2-3x^2)}{(x^2+2)^3}.$

$$f''(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0, \frac{1}{2}\right)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) $a)$ Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2}$.   b) Calcular $I = \int Lx \cdot dx$.

$a)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} = \frac{0 \cdot e^0 - sen\, 0}{0^2} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot e^x + x \cdot e^x - cos\, x}{2x} = \frac{1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 - cos\, 0}{0} = \frac{1+0-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + sen\, x}{2} = \frac{e^0 + 1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 + 0}{2} = \frac{1+1+0+0}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} = 1.}$$

b)

$$I = \int Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = Lx \to du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \to v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow Lx \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot Lx - \int dx = x \cdot Lx - x + C.$$

$$\underline{I = \int Lx \cdot dx = x(Lx - 1) + C.}$$

****

5º) Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara?

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{12} = 0{,}0833.}$$

****