

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN****JUNIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Para realizar una excursión, un IESO no puede utilizar más de 5 autobuses de 55 plazas cada uno, ni más de 9 microbuses de 33 plazas cada uno. El coste de cada autobús se eleva a 500 euros, mientras que el coste de cada microbús es de 300 euros. Además, han de viajar 3 profesores en cada autobús y 2 en cada microbús. Si como mucho hay 27 profesores que pueden participar en la excursión y el coste del transporte no puede exceder de 4.300 euros, utiliza técnicas de programación lineal para determinar el número de autobuses y microbuses que han de contratarse para que el número de alumnos que puedan ir de excursión sea máximo. ¿A cuánto asciende ese número de alumnos?

Sean x e y el número de autobuses y microbuses, respectivamente, que utiliza el IES para realizar la excursión.

$$\text{El conjunto de restricciones es: } \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 3x + 2y \leq 27 \\ 500x + 300y \leq 4.300 \end{array} \right\} \text{ o: } \left. \begin{array}{l} x \leq 5, y \leq 9 \\ 3x + 2y \leq 27 \\ 5x + 3y \leq 43 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función de objetivos es la siguiente: $F(x, y) = 55x + 33y$.

$$\textcircled{1} \Rightarrow 3x + 2y \leq 27 \Rightarrow y \geq \frac{27-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	9	3
y	0	9

$$\textcircled{2} \Rightarrow 5x + 3y \leq 43 \Rightarrow y \leq \frac{43-5x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	5	8
y	6	1

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

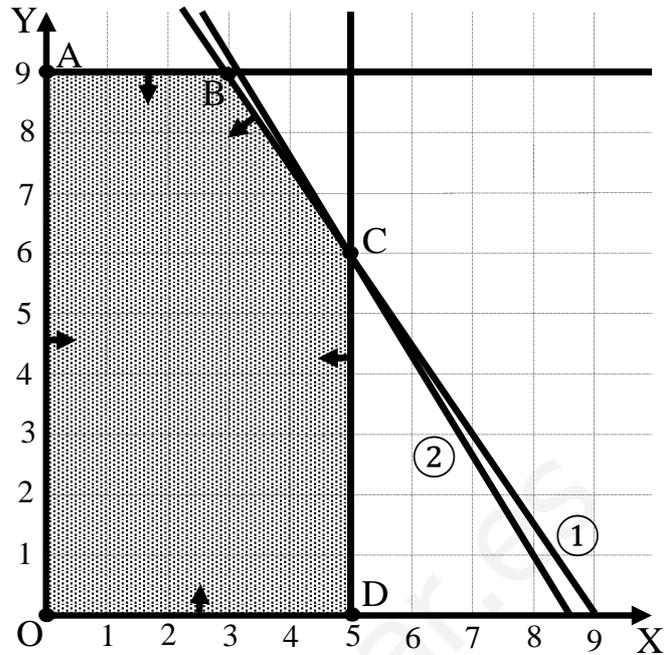
$$A \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 9).$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow B(3, 9).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 5x + 3y = 43 \end{cases} \Rightarrow C(5, 6).$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:



$$A \Rightarrow f(0, 9) = 55 \cdot 0 + 33 \cdot 9 = 0 + 297 = 297.$$

$$B \Rightarrow f(3, 9) = 55 \cdot 3 + 33 \cdot 9 = 165 + 297 = 462.$$

$$C \Rightarrow f(5, 6) = 55 \cdot 5 + 33 \cdot 6 = 275 + 198 = 473.$$

$$D \Rightarrow f(5, 0) = 55 \cdot 5 + 33 \cdot 0 = 275 + 0 = 275.$$

Deben utilizarse 3 autobuses y 9 microbuses.

El máximo número de estudiantes que pueden ir de excursión son 462.

2º) Calcula los valores de los parámetros a, b y c en la función $y = ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto $P(1, 4)$.

Por pasar por el origen: $y_{(0)} = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $y = f(x) = ax^3 - bx$.

Por contener $y = f(x) = ax^3 - bx$ al punto $P(1, 4) \Rightarrow f(1) = 4$:

$$f(1) = a \cdot 1^3 - b \cdot 1 = \mathbf{a - b = 4.} \quad (1)$$

Por tener $y = f(x) = ax^3 - bx$ un máximo relativo en $P(1, 4) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 - b \Rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 - b = \mathbf{3a - b = 0.} \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} a - b = 4 \\ 3a - b = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -a + b = -4 \\ 3a - b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = -4; \underline{a = -2}, \underline{b = -6}.$$

3º) La probabilidad de que un socio de un club vaya a la playa de vacaciones es 0,9. Si el club tiene 60 socios, calcula, utilizando la aproximación a la distribución normal apropiada, la probabilidad de que como mucho 50 socios vayan a la playa de vacaciones.

$$\text{Para } n = 60 \rightarrow \begin{cases} p = 0,9 \\ q = 0,1 \end{cases} \Rightarrow \hat{P} = N\left(0,9, \sqrt{\frac{0,9 \cdot 0,1}{60}}\right) = N\left(0,9, \sqrt{\frac{0,09}{60}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{P} = N(0,9, 0,039).$$

$$P = \frac{50}{60} = 0,83.$$

$$P\left(\hat{P} \leq \frac{50}{60}\right) = P(\hat{P} < 0,83) = P\left(\frac{\hat{P} - 0,9}{0,039} \leq \frac{0,83 - 0,9}{0,039}\right) = P\left(Z \leq \frac{-0,07}{0,039}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1,79) = 1 - P(Z < 1,79) = 1 - 0,9633 = \underline{0,0367}.$$

4º) El 30 % de los despidos laborales de una empresa son improcedentes. Si la empresa despide a 3 trabajadores hoy, ¿cuál es la probabilidad de que hoy ningún despido sea improcedente?

La probabilidad de que un despido sea improcedente es: $P(i) = 0,3$.

La probabilidad de que un despido sea procedente es: $P(p) = 1 - 0,3 = 0,7$.

$$P = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = (0,7)^3 = 0,343.$$

La probabilidad de que ningún despido de hoy sea improcedente es 0,343.

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Una editorial va a lanzar al mercado tres ediciones L_1 , L_2 y L_3 de libros de bolsillo. Los costes por unidad de cada libro son 7, 5 y 6 euros, respectivamente. El coste total de las tres ediciones asciende a 37.500 euros. Se sabe que el número de ejemplares de L_3 es igual a dos séptimos del número de ejemplares de L_2 , y que, si al triple del número de ejemplares de L_1 se le suma el número de ejemplares de L_3 , se obtiene el doble del número de ejemplares de L_2 . Calcula cuántos libros de cada tipo se han editado.

Siendo x, y, z los libros lanzados por las ediciones L_1, L_2 y L_3 , respectivamente, del enunciado del ejercicio se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 5y + 6z = 37.500 \\ z = \frac{2}{7}y \\ 3x + z = 2y \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} 7x + 5y + 6z = 37.500 \\ 2y - 7z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

De la segunda ecuación: $2y = 7z \rightarrow y = \frac{7}{2}z = 3,5z$.

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $3x - 7z + z = 0$; $3x - 6z = 0 \Rightarrow x = 2z$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación los valores obtenidos de x e y en función de z :

$$7 \cdot 2z + 5 \cdot 3,5z + 6z = 37.500; \quad 14z + 17,5z + 6z = 37.500;$$

$$37,5z = 37.500 \Rightarrow z = 1.000, x = 2.000 \text{ e } y = 3.500.$$

Se han editado 2.000, 3.500 y 1.000 libros de L_1, L_2 y L_3 , respectivamente.

2º) Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + b & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) Calcula el valor del parámetro b para que $f(x)$ sea continua.

b) Para $b = 6$ estudia la derivabilidad de $f(x)$ en $[0, 2]$ y representa su gráfica.

a)

Por ser $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 = f(1)$, la función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , excepto para $x = -1$, que se va a obtener el correspondiente valor de b para que lo sea.

Para que la función sea continua en $x = -1$ es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^2} + b \right) = f(-1) = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 4) = 3 + 4 = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + b = 7 \Rightarrow \mathbf{b = 6}.$$

La función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} para $b = 6$.

La función resulta $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 6 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

b)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales; una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

La función $f(x)$ es derivable en $[0, 2]$ por ser polinómica, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad es dudosa y se estudia a continuación:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3} + 6 & \text{si } x \leq -1 \\ 6x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -3x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1^-) = 6 \neq f'(1^+) = -3.$$

La función $f(x)$ es derivable en $[0, 2]$, excepto para $x = 1$.

Para la representación de la función tenemos en cuenta que en su intervalo $(-\infty, -1]$ se trata de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2} + 6$, que es creciente en su dominio, por ser $g'(x) = \frac{-2}{x^3} > 0, \forall x \in (-\infty, -1]$.

Tiene como asíntota horizontal en este intervalo a la recta de ecuación $y = 6$ por ser $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 6 \right) = \frac{1}{\infty} + 6 = 0 + 6 = 6$.

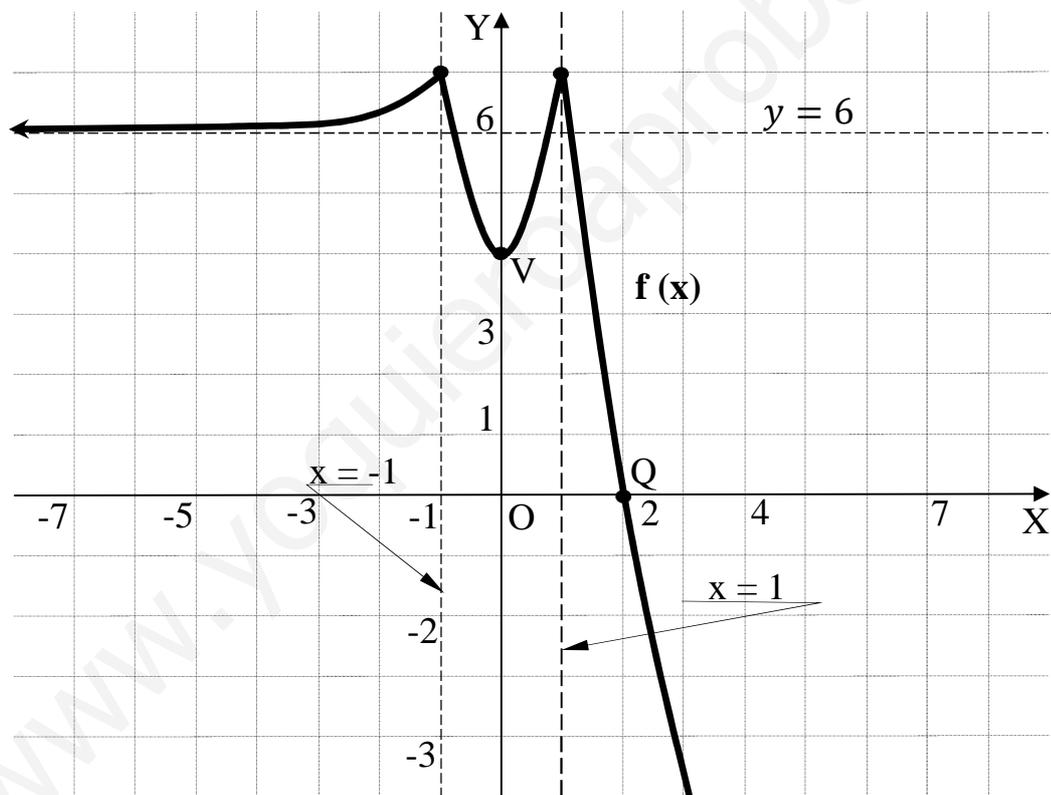
En el intervalo $(-1, 1)$ tiene la expresión $h(x) = 3x^2 + 4$, que es una parábola convexa (U) que tiene su vértice en el punto $V(0, 4)$ y es simétrica con respecto al eje Y por ser $h(x) = h(-x)$.

En el intervalo $[1, +\infty)$ tiene por expresión $i(x) = -x^3 + 8$, que es decreciente en su dominio, por ser $i'(x) = -3x^2 < x, \forall x \in [1, +\infty)$.

$$i(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Corta al eje X en el punto $Q(2, 0)$.

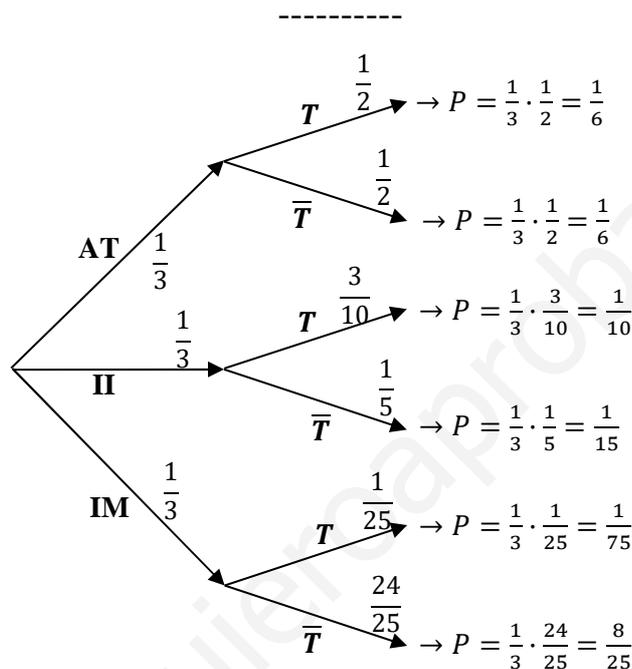
La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



3º) En una Escuela Politécnica se imparten tres grados: Arquitectura Técnica, Ingeniería Informática e Ingeniería Mecánica. Un estudio, realizado sobre 60 alumnos de cada grado, revela que han terminado sus estudios en cuatro años el 5 % de los alumnos de Ingeniería Mecánica, el 30 % de Ingeniería Informática y el 50 % de Arquitectura Técnica. Se elige un estudiante al azar:

a) Calcula la probabilidad de que haya terminado sus estudios en cuatro años.

b) Calcula la probabilidad de que sea alumno de Ingeniería Mecánica y haya terminado sus estudios en cuatro años.



a)

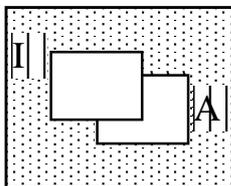
$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{75} = \frac{25+15+2}{150} = \frac{42}{150} = \frac{7}{25}$$

b)

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{75}$$

4º) El 78 % de los universitarios estudia inglés, el 23 % estudia alemán y el 15 % estudia ambos idiomas. Calcula la probabilidad de encontrar un universitario que no estudie ninguno de los dos idiomas.

Datos: $P(I) = 0,78$, $P(A) = 0,23$, $P(I \cap A) = 0,15 \Rightarrow \text{¿}P(\bar{I} \cap \bar{A})\text{?}$



$$P = P(\bar{I} \cap \bar{A}) = 1 - P(I \cup A) = 1 - [P(I) + P(A) - P(I \cap A)] =$$
$$= 1 - (0,78 + 0,23 - 0,15) = 1 - (1,01 - 0,15) = 1 - 0,86 = \underline{0,14}.$$

www.yoquieroaprobar.es