PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas.

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y-az=-1 \end{cases}$, en función del parámetro a:

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=-2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -a & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix}=-2a-6-10-2+10-6a=0;\ -8a-8=0;$$

$a+1=0 \Rightarrow a=-1.$

$$\underline{Para\ a\neq -1 \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2+4-4-6=-8\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$b)$

Para $a = -2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4+10+2-8}{4-6-10-2+10+12} = \frac{8}{8} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{4+3-2-5}{8} = \frac{0}{8} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-2+4-4-6}{8} = \frac{-8}{8} = -1.$$

$$\underline{Solución: x = 1;\ \ y = 0;\ \ z = -1}.$$

****

2º) Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2.400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1.000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 euros y en cada televisor QLED es de 50 euros. Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

Sean x e y el número de televisores de los tipos LED y QLED que fabrica la empresa, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 4x+3y \leq 2.400 \\ 2x+y \leq 1.000 \\ x \geq 0;\ y \geq 200 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 4x+3y \leq 2.400 \Rightarrow y \leq \frac{2.400-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

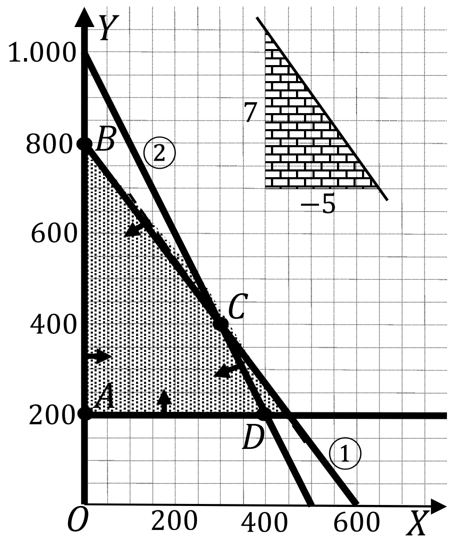
x	0	600
y	800	0

$② \Rightarrow 4x+3y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	500
y	1.000	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,200).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 4x+3y=2.400 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,800).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=2.400 \\ 2x+y=1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=2.400 \\ -4x-2y=-2.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y=400;$

$4x+1.200=2.400;\ \ x=300 \Rightarrow C(300,400).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=200 \\ 2x+y=1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+200=1.000;\ \ x+100=500;\ \ D(400,200).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=70x+50y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 200) = 70 \cdot 0 + 50 \cdot 200 = 0 + 10.000 = 10.000.$

$B \Rightarrow f(0, 800) = 70 \cdot 0 + 50 \cdot 800 = 0 + 40.000 = 40.000.$

$C \Rightarrow f(300, 400) = 70 \cdot 300 + 50 \cdot 400 = 21.000 + 20.000 = 41.000.$

$D \Rightarrow f(400, 200) = 70 \cdot 400 + 50 \cdot 20 = 28.000 + 10.000 = 38.000.$

El máximo se produce en el punto $C(300, 400)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(300, 400)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 70x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{50}x = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$

$$\underline{Debe\ fabricar\ 300\ televisores\ LED\ y\ 400\ QLED.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 41.000\ euros.}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 \ \ si \ \ x\le 3 \\ 3x-2m \ \ \ si \ \ \ x>3 \end{cases}$:

a) Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.

b) Para $m=-1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[5,7]$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de m para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+2)=2=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(3x-2m)=9-2m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \Rightarrow 2=9-2m;\ \ 2m=7 \Rightarrow \underline{m=\frac{7}{2}=3{,}5}.$$

b)

Para $m=-1$ la función resulta $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 \ \ si \ \ x\le 3 \\ 3x+2 \ \ \ si \ \ \ x>3 \end{cases}$.

En el intervalo $[5,7]$ todas las ordenadas de $f(x)$ son positivas.

$$S=\int_5^7 f(x)\cdot dx=\int_5^7 (3x+2)\cdot dx=\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_5^7=$$

$$=\left(\frac{3\cdot 7^2}{2}+2\cdot 7\right)-\left(\frac{3\cdot 5^2}{2}+2\cdot 5\right)=\frac{147}{2}+14-\frac{75}{2}-10=4+\frac{72}{2}=4+36=40.$$

$$\underline{S=40\ u^2}.$$

****

4º) La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23°C y en ningún caso debe bajar de los 7°C. La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo: $T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$, donde $x \in [0, 24]$ es la hora del día.

a) Determina a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si éste supera los 23°C.

b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7°C el 14 de agosto?

----

a)

La función $T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2; su vértice (máximo) es el siguiente:

$T'(x) = \frac{-1}{7}x + 2.$ $\qquad T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{7}x + 2 = 0;\ -x + 14 = 0 \Rightarrow x = 14.$

$T(14) = \frac{-1}{14} \cdot 14^2 + 2 \cdot 14 + 10 = -14 + 28 + 10 = 24.$

$\underline{La\ temperatura\ máxima\ se\ alcanza\ a\ las\ 14\ horas\ y\ es\ de\ 24°C.}$

b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7°C el 14 de agosto?

$T(24) = \frac{-1}{14} \cdot 24^2 + 2 \cdot 24 + 10 = -\frac{288}{7} + 48 + 10 = 58 - \frac{288}{7} =$

$= \frac{406-288}{7} = \frac{118}{7} = 16{,}86°C.$

$T(0) = 10°C.$

$\underline{La\ temperatura\ mínima\ se\ alcanzó\ a\ las\ 0\ horas\ y\ fue\ de\ 10°C.}$

$\underline{El\ 14\ de\ agosto\ la\ temperatura\ mínima\ no\ fue\ inferior\ a\ 7°C.}$

****

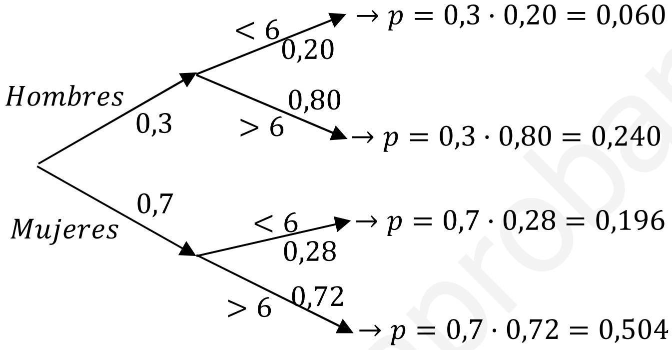
5º) El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6.000 euros mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6.000 euros?

b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6.000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

----

a)



a)

$$P = P(<6) = P(H \cap <6) + P(M \cap <6) =$$

$$= P(H) \cdot P(<6/H) + P(M) \cdot P(<6/M) = 0{,}3 \cdot 0{,}20 + 0{,}7 \cdot 0{,}28 =$$

$$= 0{,}060 + 0{,}196 = \underline{0{,}256}.$$

c)

$$P = P(M| <6) = \frac{P(M\cap<6)}{P(M)} = \frac{P(M)\cdot P(<6|M)}{P(M)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}28}{0{,}256} = \frac{0{,}196}{0{,}256} = \underline{0{,}7656}.$$

****

6º) Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12,5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los 4 primeros meses.

a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.

b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

----

a)

$Datos$: $\mu = 32;\ \ \sigma = 12{,}5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(32;\ 12{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-32}{12{,}5}$.

$P = P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-32}{12{,}5}\right) = P\left(Z \leq \frac{-28}{12{,}5}\right) = P(Z \leq -2{,}24) =$

$= 1 - P(Z < 2{,}24) = 1 - 0{,}9875 = \underline{0{,}0125}.$

b)

$Datos$: $\mu = 32;\ \ n = 64;\ \ \sigma = 12{,}5.$

$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(32;\ \frac{12{,}5}{\sqrt{64}}\right) = N\left(32;\ \frac{12{,}5}{8}\right) = N(32;\ 1{,}5625).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-32}{1{,}5625}$.

$P = P(X \geq 36) = P\left(Z \geq \frac{36-32}{1{,}5625}\right) = P\left(Z \geq \frac{4}{1{,}5625}\right) = P(Z \geq 2{,}56) =.$

$= 1 - P(Z < 2{,}56) = 1 - 0{,}9948 = \underline{0{,}0052}.$

****

Cuestiones.

1ª) ¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?

Para que una matriz sea invertible es condición necesaria que sea cuadrada.

$\underline{Una\ matriz\ de\ dimensión\ 4 \times 2\ no\ es\ invertible}.$

Para que una matriz coincida con su traspuesta tiene que ser, necesariamente, cuadrada; por otra parte la traspuesta de una matriz de dimensión 4×2 es otra matriz de dimensión 2×4.

$\underline{Una\ matriz\ de\ dimensión\ 4 \times 2\ es\ imposible\ que\ coincida\ con\ su\ traspuesta.}$

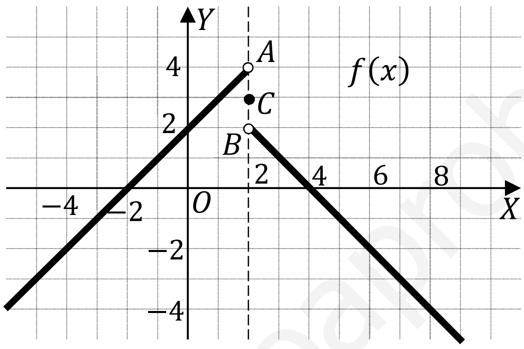
****

2ª) Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \;\; x < 2 \\ 3 & si \;\; x = 2 \\ 4-x & si \;\; x > 2 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función es la semirrecta $y = x + 2$ cuyo origen es el punto $A(2, 4)$ y tiene por pendiente $m = 1$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es la semirrecta $y = -x + 4$ cuyo origen es el punto $B(2, 2)$ y tiene por pendiente $m = -1$.

La representación gráfica de la función es la siguiente:



****

3ª) Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga al menos una cruz.

El espacio muestral es el siguiente:

$$E = \left\{(c,c,c), \underline{(c,c,+),(c,+,c),(+,c,c),(c,+,+),(+,c,+),(+,+,c),(+,+,+)}\right\}.$$

Los casos favorables son los que aparecen subrayados.

Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \underline{\frac{7}{8} = 0{,}875}.$$

****