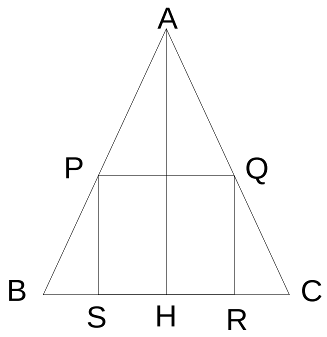
PRIMER BLOQUE

A El triángulo BAC es isósceles en A. La base (BC) mide 12 cm. y la altura (AH) mide 18 cm. Se quiere inscribir un rectángulo PQRS de superficie máxima. Hallar las dimensiones de este rectángulo.



$$\begin{cases} \dfrac{\left|\overrightarrow{CH}\right|}{\left|\overrightarrow{CR}\right|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} \Rightarrow \dfrac{6}{\left|\overrightarrow{CH}\right| - \left|\overrightarrow{HR}\right|} = \dfrac{18}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} \Rightarrow \dfrac{1}{6 - \dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}{2}} = \dfrac{3}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} \Rightarrow \dfrac{1}{\dfrac{12 - \left|\overrightarrow{PQ}\right|}{2}} = \dfrac{3}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} \Rightarrow \dfrac{2}{12 - \left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \dfrac{3}{\left|\overrightarrow{QR}\right|} \Rightarrow \\ S = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{QR}\right| \end{cases}$$

$$36 - 3 \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 2 \cdot \left|\overrightarrow{QR}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = 18 - \frac{3}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| \Rightarrow S = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left(18 - \frac{3}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|\right) \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{d\left(\overrightarrow{PQ}\right)} = \left(18 - \frac{3}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|\right) - \frac{3}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 18 - 3 \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 18 - 3 \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 18 \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 6 \Rightarrow S' = \frac{d^2 S}{d\left(\overrightarrow{PQ}\right)^2} = -3 < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 6\ cm \\ \left|\overrightarrow{QR}\right| = 18 - \dfrac{3}{2} \cdot 6 = 18 - \dfrac{18}{2} = \dfrac{18}{2} = 9\ cm \end{cases}$$

B Determinar la ecuación de un plano que contenga el punto P(1,-1,3) y sea paralelo al plano determinado por los puntos A(1,1,2), B(1,1,1) y C(2,-2,1). Hallar la distancia entre los dos planos.

Es un plano π que tiene como vector director el del plano α que contiene a los tres puntos, vector que es perpendicular al determinado por **P** y **G** siendo este el punto generador de la recta y por lo tanto su producto escalar es nulo y la ecuación del plano pedido.

Previamente tenemos que determinar el plano α, este se halla gracias a los vectores AB, AC y AG, siendo G el punto generador del plano, como los tres son coplanarios este ultimo es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (1,1,2) = (0,0,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,-2,1) - (1,1,2) = (1,-3,-1) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z) - (1,1,2) = (x-1, y-1, z-2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(y-1) - 3(x-1) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 3x + y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_\alpha} = (3,1,0) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z) - (1,-1,3) = (x-1, y+1, z-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(3,1,0)(x-1, y+1, z-3) = 0 \Rightarrow 3(x-1) + y + 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x + y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$d(\alpha,\pi) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-4-(-2)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}\, u$$

SEGUNDO BLOQUE

A Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2x+1}, & \text{si } x\le -1, \\ x^2-2x-5, & \text{si } -1<x\le 4, \\ 5, & \text{si } x>4. \end{cases}$

$$\begin{cases} f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{2}{2\cdot(-1)+1}=-2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=(-1)^2-2\cdot(-1)-5=1+2-5=-2 \end{cases} \Rightarrow f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=-2 \Rightarrow$$

Continua en $x=-1$

$$\begin{cases} f(4)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=4^2-2\cdot 4-5=16-8-5=3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=5 \end{cases} \Rightarrow f(4)=\lim_{x\to 4^-} f(x)\neq \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow 3\neq 5 \Rightarrow$$

No es continua en $x=4$

Al no ser continua ya no es derivable en **x = 4**, veamos si lo es en **x = -1**

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{4}{(2x+1)^2} & si \quad x<-1 \\ 2x-2 & si \quad 1<x<4 \\ 0 & si \quad x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=-\dfrac{4}{[2\cdot(-1)+1]^2}=-4 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=2\cdot(-1)-2=-4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^+} f'(x)$$

Es derivable en **x = -1**

B Las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y \quad = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ se cruzan. Hallar las ecuaciones de la perpendicular común.

Llamando **t** a la recta que se busca, después de hallar su vector director como diferencia entre los valores de los puntos de apoyo de las rectas, tenemos que tiene que ser perpendicular a los dos vectores directores de las rectas y por lo tanto sus productos escalares son nulos

$$x = 7 - 2y \Rightarrow 7 - 2y + y - z = 4 \Rightarrow z = 3 - y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} = [7 - 2\lambda - 2\ , \lambda - (-3), 3 - \lambda - \mu] = (5 - 2\lambda\ , \lambda + 3\ , 3 - \lambda - \mu) \\ \overrightarrow{v_r} = (-2\ , 1\ , -1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0\ , 0\ , 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (-2\ , 1\ , -1) \cdot (5 - 2\lambda\ , \lambda + 3\ , 3 - \lambda - \mu) = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (0\ , 0\ , 1) \cdot (5 - 2\lambda\ , \lambda + 3\ , 3 - \lambda - \mu) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 + 4\lambda + \lambda + 3 - 3 + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow 6\lambda + \mu = 10 \\ 3 - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 3 \end{cases} \Rightarrow 5\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} + \mu = 3 \Rightarrow \mu = 3 - \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{8}{5} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \left(5 - 2 \cdot \frac{7}{5}, \frac{7}{5} + 3\ , 3 - \frac{7}{5} - \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}, 0\right) \equiv (1\ , 2\ , 0)$$

$$Punto\ P\ por\ el\ que\ pasa\ la\ recta\ t \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = -3 + 2\beta \\ z = \frac{8}{5} \end{cases}$$

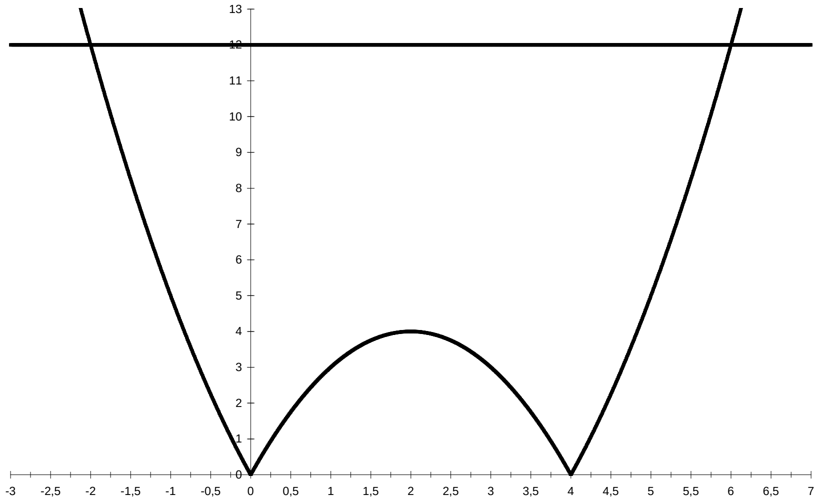
TERCER BLOQUE

A Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x)=|x^2-4x|$ y la recta y=12. Dibujar el recinto.

$$x^2-4x>0 \Rightarrow (x-4)x>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x-4>0 \Rightarrow x>4 \end{cases}$$

	$-\infty$ 0	0 4	4 ∞
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 4	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & si \quad x\le 0 \\ -x^2+4x & si \quad 0<x\le 4 \\ x^2-4x & si \quad x>4 \end{cases}$$



$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x=12 \Rightarrow x^2-4x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases} \\ -x^2+4x=12 \Rightarrow x^2-4x+12=0 \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$A=\int_{-2}^{5} 12\,dx-\int_{-2}^{5}\left(x^2-4x\right)dx-\int_{0}^{4}\left(-x^2+4x\right)dx-\int_{4}^{5}\left(x^2-4x\right)dx=$$

$$A=12\cdot[x]_{-2}^{5}-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{0}+4\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{0}^{4}-4\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{0}^{4}-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{4}^{5}+4\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{4}^{5}$$

$$A=12\cdot 7-\frac{8}{3}-2\cdot 4+\frac{64}{3}-2\cdot 16-\frac{61}{3}+2\cdot 9=84+18+\frac{64}{3}-\frac{69}{3}-40=62-\frac{5}{3}=\frac{181}{3}\,u^2$$

B Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro a, y resolverlo cuando sea posible: $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 8a - 2 - 10 - 16 + 10 + a = 9a - 18 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 9a - 18 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\forall a \in \Re - \{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & -36 & 0 & -27 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -31 \Rightarrow z = -\frac{31}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

CUARTO BLOQUE

A Calcular $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\ \hline -x^4 + x^3 + 2x^2 & x - 2 \\ \quad -2x^3 + 2x^2 - 3x - 2 & \\ \quad\ 2x^3 - 2x^2 - 4x & \\ \hline \qquad -7x - 2 & \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x - 2 + \frac{-7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x^2 - x - 2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Continuación del Problema A del Cuarto Bloque

$$\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x-2+\frac{-7x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{-7x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x-2)(x+1)+B\,x(x+1)+C\,x(x-2)}{x(x-2)(x+1)}\Rightarrow$$

$$A(x-2)(x+1)+B\,x(x+1)+C\,x(x-2)=-7x-2\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0\Rightarrow A(0-2)(0+1)+B\cdot 0\cdot(0+1)+C\cdot 0\cdot(0-2)=-7\cdot 0-2\Rightarrow -2A=-2 \\ x=2\Rightarrow A(2-2)(2+1)+B\cdot 2\cdot(2+1)+C\cdot 2\cdot(2-2)=-7\cdot 2-2\Rightarrow 6B=-16 \\ x=-1\Rightarrow A(-1-2)(-1+1)+B(-1)(-1+1)+C(-1)(-1-2)=-7(-1)-2\Rightarrow 3C=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{8}{3} \\ C=\frac{5}{3} \end{cases}\Rightarrow \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x-2+\frac{1}{x}+\frac{-\frac{8}{3}}{x-2}+\frac{\frac{5}{3}}{x+1}$$

$$\int\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx=\int(x-2)\,dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$\begin{cases} x-2=t\Rightarrow dx=dt \\ x+1=u\Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x-\frac{8}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{du}{t}=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x-\frac{8}{3}\ln t+\frac{5}{3}\ln u=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln\frac{xu^{\frac{5}{3}}}{t^{\frac{8}{3}}}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln\frac{x(x+1)^{\frac{5}{3}}}{(x-2)^{\frac{8}{3}}}=\frac{1}{2}x^2-2x+\ln\frac{x(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2}}{(x-2)^2\sqrt[3]{(x-2)^2}}+K$$

B Resolver la ecuación A B X - C X = 2A, siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&2&6\\-1&2&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

$$(AB-C)X=2A\Rightarrow(AB-C)^{-1}(AB-C)X=2(AB-C)^{-1}A\Rightarrow IX=2(AB-C)^{-1}A\Rightarrow$$
$$X=2(AB-C)^{-1}A$$

$$Veamos\ si\ AB-C\ tiene\ inversa\xrightarrow{condicion\ necesaria}|AB-C|\neq 0$$

$$AB-C=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&6\\-1&2&3\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&3\\8&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&6\\-1&2&3\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-3\\9&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|AB-C|=\begin{vmatrix}6&-3&-3\\9&-1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-3\neq 0\Rightarrow Existe\ \exists(AB-C)^{-1}\Rightarrow(AB-C)^{-1}=\frac{1}{|AB-C|}\left[adj\,(AB-C)^t\right]$$

$$(AB-C)^t=\begin{pmatrix}6&9&1\\-3&-1&0\\-3&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow adj\,(AB-C)^t=\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&3&-27\\1&-3&21\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(AB-C)^{-1}=\frac{1}{(-3)}\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&3&-27\\1&-3&21\end{pmatrix}\Rightarrow X=2\cdot\frac{1}{(-3)}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&3&-27\\1&-3&21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$X=2\cdot\frac{1}{(-3)}\cdot\begin{pmatrix}0&-3\\6&-24\\-5&20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-4&16\\\frac{10}{3}&-\frac{40}{3}\end{pmatrix}$$

.