PRIMER BLOQUE

A Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m^2 de revestimiento lateral es 100 euros, el precio del m^2 de revestimiento del fondo es 200 euros. Halla también el coste mínimo.

Siendo **B** el lado de la base cuadrada y **H** la altura

$$\left\{\begin{array}{l} 1000 = B^2 H \Rightarrow H = \dfrac{1000}{B^2} \\ P = 4\cdot BH\cdot 100 + B^2 .200 = 400\cdot BH + 200\cdot B^2 = 200\cdot\left(2BH + B^2\right)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$P = 200\cdot\left(2B\cdot\frac{1000}{B^2} + B^2\right) = 200\cdot\left(\frac{2000}{B} + B^2\right) \Rightarrow P' = \frac{dP}{dB} = 200\cdot\left(-\frac{2000}{B^2} + 2B\right)$$

$$P' = 400\cdot\left(\frac{-1000 + B^3}{B^2}\right) \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow \left(\frac{-1000 + B^3}{B^2}\right) = 0 \Rightarrow B^3 - 1000 = 0 \Rightarrow$$

$$B^3 = 1000 \Rightarrow B = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{dB^2} = 400\cdot\left[\frac{3B^4 - 2B\left(-1000 + B^3\right)}{B^4}\right]$$

$$P'' = 400\cdot\left(\frac{3B^3 + 2000 - 2B^3}{B^3}\right) = 400\cdot\left(\frac{B^3 + 2000}{B^3}\right) \Rightarrow$$

$$P''(10) = 400\cdot\left(\frac{10^3 + 2000}{10^3}\right) = 400\cdot\left(\frac{3000}{1000}\right) = 120 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 10\ m \\ H = \dfrac{1000}{10^2} = 10\ m\end{array}\right.$$

$$Pr\,ecio = 200\cdot\left(2\cdot 10\cdot 10 + 10^2\right) = 200\cdot(200 + 100) = 200.300 = 60000\ €$$

B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1º- Halla la inversa de $A - BC$. 2º- Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$

1º.- La condición para tener una matriz inversa es que su determinante sea nulo

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - BC| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 3 - 1 = -7 \neq 0 \Rightarrow Existe\ (A - BC)^{-1} \Rightarrow (A - BC)^{-1} = \frac{1}{|A - BC|}\cdot\left[adj\ (A - BC)^t\right]$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

$$(A-BC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\,(A-BC)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-BC)^{-1} = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-BC)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

b)

$$(A-BC)X = A \Rightarrow (A-BC)^{-1}(A-BC)X = (A-BC)^{-1}A \Rightarrow IX = (A-BC)^{-1}A \Rightarrow X = (A-BC)^{-1}A$$

$$X = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 4 & -9 & -4 \\ 10 & -12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{9}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{10}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

SEGUNDO BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ ax^2+bx & \text{si} \quad -2 < x \le 4 \\ x-4 & \text{si} \quad 4 < x \end{cases}$, determina a y b de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

$$\begin{cases} f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = a(-2)^2 + b \cdot (-2) = 4a - 2b \end{cases} \Rightarrow f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) \Rightarrow 4a - 2b = -3$$

$$\begin{cases} f(4) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 16a + 4b \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow 16a + 4b = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b = -3 \\ 8a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 12a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + b = 0 \Rightarrow -1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \quad si \quad x < -2 \\ -\frac{1}{2}x + 1 \quad si \quad -2 < x < 4 \\ 1 \quad si \quad x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow Derivable\ x = -2 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} f'(x) = -2 + 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow No\ derivable\ x = 4 \end{cases}$$

B Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y-3z=k \\ y-2z=2 \end{cases}$ se corten.

Halla el punto de corte.

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2-y \\ z = -3+y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = k+3z \\ y = 2+2z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = k+3\alpha \\ y = 2+2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = k+3\alpha \\ \lambda = 2+2\alpha \\ -3+\lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\alpha = 0 \\ \lambda - \alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\alpha = 0 \\ -2\lambda + 2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$-\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow 6-\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow 2-6 = k+3.3 \Rightarrow -4 = k+9 \Rightarrow k = -13 \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ corte \Rightarrow P \begin{cases} x = 2-6 \\ y = 6 \\ z = -3+6 \end{cases} \Rightarrow P(-4\ ,6\ ,3)$$

Nota: Quiero entender que hay un error en el enunciado y que la ecuación de la segunda recta es $\begin{cases} x-3z=k \\ y-2z=2 \end{cases}$

TERCER BLOQUE

A Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{4(x-\ln(1+x))}{x\ln(1+x)}$; (ln=logaritmo neperiano)

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a , b]**, derivables en **(a , b)**, que cumplen $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a\ ,b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el intervalo **(a , b)**. Entonces, si **f(x₀) = g(x₀) = 0** y existe el $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

B Clasifica el sistema según los valores de m y resuelve cuando $m = -1$, $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+4z=-1 \\ x+3y+m^2z=3m \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = 5m^2+8+18-15-12-4m^2 = m^2-1 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1$$

$$m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re - \{-1, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 = rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Compat.Deter\min ado$$

$Si\ m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ ultima\ es\ combinación\ lineal\ de$$

$las\ otras\ dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$y - 2z = -5 \Rightarrow y = 2z - 5 \Rightarrow x + 4z - 10 + 3z = 2 \Rightarrow x = -7z + 12 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x, y, z) = (-7\lambda + 12, 2\lambda - 5, \lambda)$$

CUARTO BLOQUE

A Calcula $\int \frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx$

$$x^3-4x^2+4x=0 \Rightarrow \left(x^2-4x+4\right)x=0 \Rightarrow x\left(x-2\right)^2=0 \Rightarrow x^3-4x^2+4x=x\left(x-2\right)^2$$

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x+2}{x\left(x-2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{\left(x-2\right)^2}=\frac{A\left(x-2\right)^2+Bx\left(x-2\right)+Cx}{x\left(x-2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A\left(x-2\right)^2+Bx\left(x-2\right)+Cx=x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow A\left(2-2\right)^2+B\cdot 2\cdot\left(2-2\right)+C\cdot 2=2+2 \\ x=0 \Rightarrow A\left(0-2\right)^2+B\cdot 0\cdot\left(0-2\right)+C\cdot 0=0+2 \end{cases} \Rightarrow \\ 2A\left(x-2\right)+B\left(x-2\right)+Bx+C=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow 2A\left(2-2\right)+B\left(2-2\right)+B\cdot 2+C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C=4 \Rightarrow C=2 \\ 4A=2 \Rightarrow A=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2B+2=1 \Rightarrow 2B=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \\ 2B+C=1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x+2}{x\left(x-2\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{2}{\left(x-2\right)^2}$$

$$I=\int\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{\left(x-2\right)^2}=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{dt}{t^2}$$

$$x-2=t \Rightarrow dx=dt$$

$$I=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln t+2\int t^{-2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x-2}+2\cdot\frac{1}{\left(-1\right)}\cdot t^{-1}=\ln\sqrt{\frac{x}{x-2}}-\frac{2}{x-2}+K$$

B Halla λ para que el plano $\pi \equiv 2x + \lambda y - z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ sean paralelos.

¿Puedes encontrar otro valor de λ para que sean perpendiculares?.

Para ser paralelos recta y plano sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$r \equiv x = 1 - y \Rightarrow 2 - 2y - z = 2 \Rightarrow z = -2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = -2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,1\ ,-2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,\lambda\ ,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (-1\ ,1\ ,-2) \cdot (2\ ,\lambda\ ,-1) = 0$$

$$-2 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Para que sean perpendiculares sus vectores directores tienen que ser iguales o proporciónales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,1\ ,-2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,\lambda\ ,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \| \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{v_r}}{\overrightarrow{v_\pi}} = k \Rightarrow \frac{-1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$$

No hay valor alguno de λ que haga a la recta y el plano perpendicular

$$s \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 4z - 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 2y \Rightarrow 2x - 8y + 4 \cdot 2y - 9 = 0 \Rightarrow 2x - 9 = 0 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \mu \\ z = 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\beta} = \overrightarrow{v_s} = (0\ ,1\ ,2) \\ \overrightarrow{OG} = (x\ ,y\ ,z) - (0\ ,0\ ,0) = (x\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow$$

$$(0\ ,1\ ,2) \cdot (x\ ,y\ ,z) = 0 \Rightarrow \beta \equiv y + 2z = 0$$

$$Punto\ de\ int\,er\,sec\,ción\ Q \Rightarrow \mu + 4\mu = 0 \Rightarrow 5\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = 0 \\ z = 2 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{9}{2}\ ,0\ ,0\right)$$

$$d(0\ ,s) = d(0\ ,Q) = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 0\right)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \frac{9}{2}\ u$$