## PRIMER BLOQUE

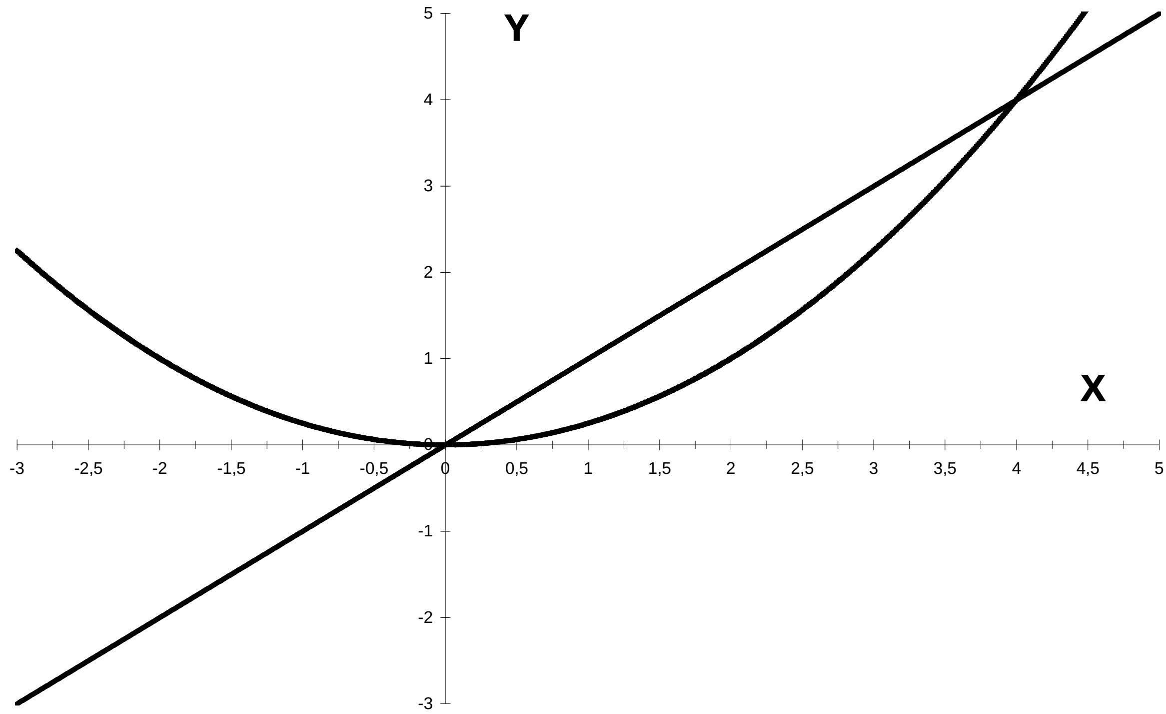
**A** Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$

a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

a) y b)




$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$A = \int_0^4 x\,dx - \frac{1}{4}\int_0^4 x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^3 = \frac{1}{2}\cdot\left(3^2 - 0^2\right) - \frac{1}{12}\cdot\left(3^3 - 0^3\right) = \frac{9}{2} - \frac{27}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}\,u^2$$

**B** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz $A$

b) Calcula la matriz $X$ que verifique la ecuación $AX = B$

a) Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow (Existe)\,\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*b )*

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## SEGUNDO BLOQUE

**A** Resuelve $\int \frac{x^2 - 1}{x(x^2+1)} dx$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow Solución\ imaginaria \Rightarrow Sin\ solución$$

$$\frac{x^2 - 1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right) + (Bx + C)x}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x\left(x^2+1\right)} \Rightarrow$$

$$(A+B)x^2 + Cx + A = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} \left(en\ x^2\right) \Rightarrow A + B = 1 \\ (en\ x) \Rightarrow C = 0 \\ (independiente) \Rightarrow A = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 + B = 1 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 - 1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x + 0}{x^2+1}$$

**Continuación del Problema A del Segundo Bloque**

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow Solución\ imaginaria \Rightarrow Sin\ solución$$

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)} \Rightarrow$$

$$\left(A+B\right)x^2+Cx+A=x^2-1 \Rightarrow \begin{cases} \left(en\ x^2\right) \Rightarrow A+B=1 \\ \left(en\ x\right) \Rightarrow C=0 \\ \left(independiente\right) \Rightarrow A=-1 \end{cases} \Rightarrow -1+B=1 \Rightarrow B=2 \Rightarrow$$

$$=\frac{-1}{x}+\frac{2x+0}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}\,dx=-\int \frac{dx}{x}+\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=-\ln x+\int \frac{dt}{t}=-\ln x+\ln t=\ln\frac{t}{x}=\ln\frac{x^2+1}{x}+K$$

$$x^2+1=t \Rightarrow 2x\,dx=dt$$

**B** Dadas las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2+2\mu \\ z = 0 \end{cases}$$

**a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.**

**b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultaneamente a r y s**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} 1+\lambda=\mu \\ \lambda=2+2\mu \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow 1+0=\mu \Rightarrow \mu=1 \Rightarrow 0=2+2\cdot 1 \Rightarrow 0\neq 4 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow \\ -\lambda=0 \end{cases}$$

$$Las\ rectas\ no\ son\ coincidentes\ ni\ sec antes\ con\ punto\ de\ corte \Rightarrow$$

$$Veamos\ si\ son\ coincidentes\ o\ se\ cruzan$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\left(1,1,-1\right) \\ \overrightarrow{v_s}=\left(1,2,0\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{1}{2} \Rightarrow No\ son\ coincidentes \Rightarrow Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$$

**Continuación del Problema B del Segundo Bloque**

b) Hallaremos el vector de la recta **t**, como un elemento general apoyado en **r** y **s,** siendo este perpendicular a los vectores directores de las rectas y los dos productos vectoriales que genera con cada uno de ellos es nulo.

$$\begin{cases} 1+\lambda = \mu \\ \lambda = 2+2\mu \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow 1+0 = \mu \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow 0 = 2+2\cdot 1 \Rightarrow 0 \neq 4 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow \\ -\lambda = 0 \end{cases}$$

$$Las\ rectas\ no\ son\ coincidentes\ ni\ sec antes\ con\ punto\ de\ corte \Rightarrow$$

$$Veamos\ si\ son\ coincidentes\ o\ se\ cruzan$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (1+\lambda-\mu\ ,\lambda-2-2\mu\ ,-\lambda) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\ ,2\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1+\lambda-\mu\ ,\lambda-2-2\mu\ ,-\lambda)\cdot(1\ ,1\ ,-1) = 0 \Rightarrow 1+\lambda-\mu+\lambda-2-2\mu+\lambda = 0 \\ (1+\lambda-\mu\ ,\lambda-2-2\mu\ ,-\lambda)\cdot(1\ ,2\ ,0) = 0 \Rightarrow 1+\lambda-\mu+2\lambda-4-4\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1-3\mu+3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda-3\mu = 1 \\ 3\lambda-3-5\mu = 0 \Rightarrow 3\lambda-5\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda-3\mu = 1 \\ -3\lambda+5\mu = -3 \end{cases} \Rightarrow 2\mu = -2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow$$

$$3\lambda - 3\cdot(-1) = 1 \Rightarrow 3\lambda+3 = 1 \Rightarrow 3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = \left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)-(-1)\ ,\left(-\frac{2}{3}\right)-2-2\cdot(-1)\ ,-\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \left(2-\frac{2}{3}\ ,-\frac{2}{3}\ ,\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\ ,-\frac{2}{3}\ ,\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{v_t} = (4\ ,-2\ ,2) \equiv (2\ ,-1\ ,1) \Rightarrow Punto\ en\ recta\ s \Rightarrow S\begin{cases} x = -1 \\ y = 2+2\cdot(-1) \Rightarrow S(-1\ ,0\ ,0) \Rightarrow \\ z = 0 \end{cases}$$

$$t \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = z$$

## TERCER BLOQUE

**A** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \le 1 \\ x^2+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que f(x) sea continua en x = 1

b) ¿Es la función f(x) para el valor de k calculado derivable en x = 1?

a)

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\cdot 1 + 5 = 7 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1^2 + k = k+1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow k+1 = 7 \Rightarrow k = 6$$

$b)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 1 \\ 2x & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2\cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \Rightarrow Derivable$$

**B** Determina las coordenadas del punto simétrico del $A(-2, 1, 6)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$

Hallaremos un plano $\pi$ perpendicular a la recta **r**, que tiene como vector director el de la recta, y que contenga al punto **A**, por lo tanto el producto escalar de ese vector y el formado por A y el punto G, genérico del plano, como son perpendiculares tiene valor nulo y es la ecuación del plano buscado.

Una vez obtenido el plano hallaremos el punto **Q** de corte de ella con la recta **r** que es el punto medio entre **A** y su simétrico **A'**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (-2, 1, 6) = (x+2, y-1, z-6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, 2, 2)\cdot(x+2, y-1, z-6) = 0 \Rightarrow x+2+2y-2+2z-12 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y+2z-12 = 0$$

$$Punto\ de\ corte\ Q \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x+2y+2z-12 = 0 \end{cases} \Rightarrow -1+\lambda+6+4\lambda-2+4\lambda-12 = 0 \Rightarrow$$

$$9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow Q(-1+1, 3+2\cdot 1, -1+2\cdot 1) \Rightarrow Q(0, 5, 1) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{-2+x_A}{`2} \Rightarrow x_A = 2 \qquad 5 = \frac{1+y_A}{`2} \Rightarrow y_A = 9 \qquad 1 = \frac{6+z_A}{`2} \Rightarrow z_A = 4 \Rightarrow$$

$$A'(2, 9, 4)$$

## CUARTO BLOQUE

**A** Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{1-\cos 0}{\left(e^0-1\right)^2}=\frac{1-1}{\left(1-1\right)^2}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{2\left(e^x-1\right)e^x}=$$

$$=\frac{sen\ 0}{2\left(e^0-1\right)e^0}=\frac{0}{2\cdot\left(1-1\right)\cdot 1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\left[e^xe^x+e^x\left(e^x-1\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\left(e^{2x}+e^{2x}-e^x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\left(2e^{2x}-e^x\right)}=\frac{\cos 0}{2\left(2e^0-e^0\right)}=\frac{1}{2\left(2\cdot 1-1\right)}=\frac{1}{2}$$

**B** Discute y resuelve - en los casos que sea posible - el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-2a+1-3+2-3a+1=-5a+1\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -5a+1=0\Rightarrow 5a=1\Rightarrow a=\frac{1}{5}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{\frac{1}{5}\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

*Solución para los casos de Sistema Compatible Determinado*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1-5a}=\frac{-2-6-3+1}{1-5a}=\frac{-10}{1-5a}=\frac{10}{5a-1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1-5a}=\frac{-2a+1+2+1}{1-5a}=\frac{-2a+4}{1-5a}=\frac{2\left(4-a\right)}{1-5a}=\frac{2\left(a-4\right)}{5a-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{1-5a}=\frac{2+3-2-6a}{1-5a}=\frac{3-6a}{1-5a}=\frac{3\left(1-2a\right)}{1-5a}=\frac{3\left(2a-1\right)}{5a-1}$$

**Continuación Problema B del Cuarto Bloque**

$$Si\ a = \frac{1}{5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{5} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -12 & 15 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$0z = 9 \Rightarrow z = \frac{9}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$