PRIMER BLOQUE

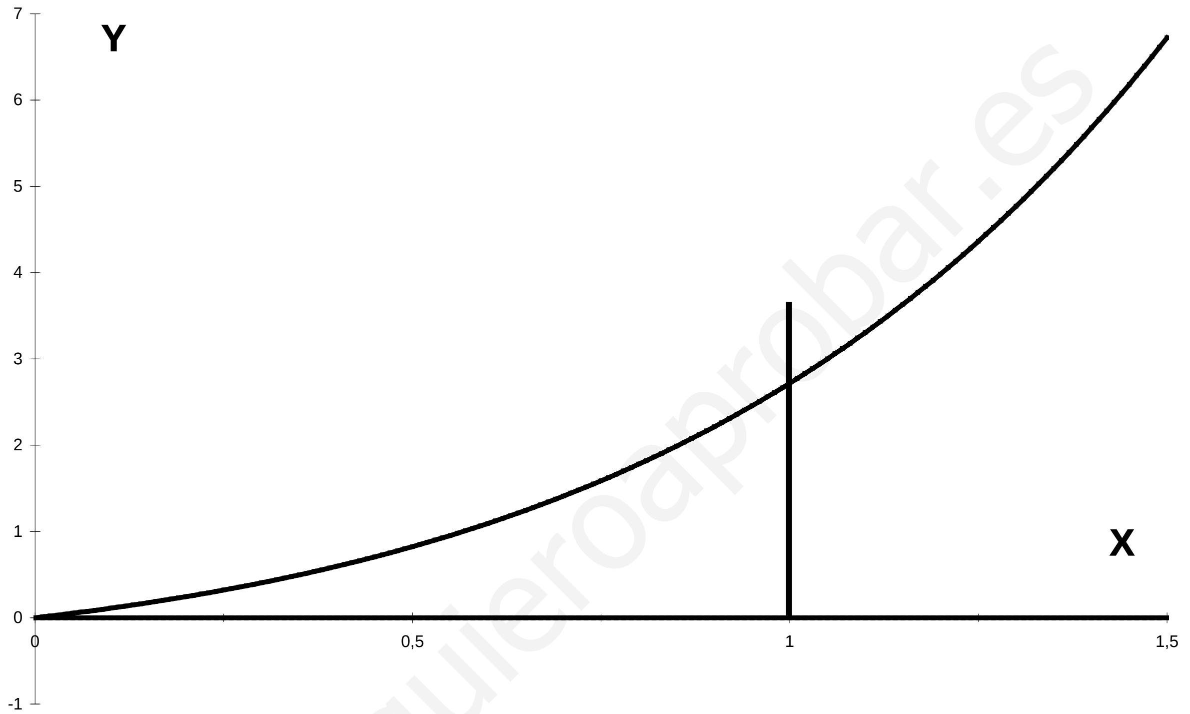
A Dada la función $y = xe^x$ y las rectas $x = 1$ e $y = 0$

a) Dibuja la gráfica de la función para $x \geqslant 0$ y la de las rectas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

a) y b)



$$A = \int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^1 = (e - 0 \cdot 1) - (e - 1) = e - e + 1 = 1\ u^2$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

B Dadas las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) En el caso de que r y s se corten calcula las coordenadas del punto de corte

Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases} \Rightarrow 3 + 5 \cdot 5 = 2\mu \Rightarrow 2\mu = 28 \Rightarrow \mu = 14 \Rightarrow 2 - 3 \cdot 5 = 1 - 14 \Rightarrow -13 = -13 \Rightarrow$$

$$Sistema\ compatible\ determinado \Rightarrow Tienen\ un\ punto, al\ menos, de\ corte$$

$$Veamos\ si\ son\ coincidentes \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-3, 5, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{-1} \neq \frac{5}{2} \Rightarrow No\ son\ coincidentes$$

$$Se\ cortan\ r\ y\ s\ en\ un\ punto\ P \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 - 3 \cdot 5 \\ y = 3 + 5 \cdot 5 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow P(-13, 28, 5)$$

SEGUNDO BLOQUE

A Resuelve $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx$

$$x^3 + x = \left(x^2 + 1\right)x \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{x^2 - x + 1}{x\left(x^2 + 1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A\left(x^2 + 1\right) + x\left(Bx + C\right)}{x\left(x^2 + 1\right)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x\left(x^2 + 1\right)}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{\left(A + B\right)x^2 + Cx + A}{x\left(x^2 + 1\right)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ C = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + B = 1 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{0 \cdot x - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = ln\ x + arc\ tg\ x + K$$

B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A

b) Resuelve la siguiente ecuación matricial $AX - B = A.B$

a) Par tener inversa una matriz su determinante no debe de ser nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \left(Existe\right) \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Continuación problema B del Segundo Bloque

b)

$$AX = AB + B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}AB + A^{-1}B \Rightarrow IX = IB + A^{-1}B \Rightarrow X = B\left(I + A^{-1}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

TERCER BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + b & si \quad x < 0 \\ ax^2 + 3 & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ determina. a y b para que $f(x)$ sea continua y no derivable en $x = 0$

Continuidad

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 + b = b \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a \cdot 0^2 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow b = 3$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0 \\ 2ax & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 2a \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No es derivable}$$

Para todo valor de $a \in \Re$ y de **b = 3** la función es continua y no derivable en **x = 0**

B Discute y resuelve - en los casos que sea posible - el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y+z = 1 \\ x+ay+z = 1 \\ x+y+az = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^3-3a+2=0 \Rightarrow$$

$$Por\ Ruffini \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow a^3-3a+2 = (a-1)^2(a+2)$$

$$a^3-3a+2=0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-2\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Comp.Determ.$$

Solución cuando es Sistema Compatible Determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3-3a+2} = \frac{a^2+1+1-a-a-1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3-3a+2} = \frac{a^2+1+1-1-a-a}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^3-3a+2} = \frac{a^2+1+1-a-a-1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z) = \left(\frac{1}{a+2}\ , \frac{1}{a+2}\ , \frac{1}{a+2} \right)$$

Continuación problema B del Tercer Bloque

$$Si\ a = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ segunda\ y\ tercera\ ecuación\ son\ combinación\ lineal$$

$$de\ la\ primera \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow x = 1 - y - z$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1 - \lambda - \mu\ ,\ \lambda\ ,\ \mu)$$

$$Si\ a = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$0z = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

CUARTO BLOQUE

A Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a , b]**, derivables en **(a , b)**, que cumplen $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a\ ,b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el intervalo **(a , b)**. Entonces, si **f(x₀) = g(x₀) = 0** y existe el $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{1^3 - 3 \cdot 1 + 2}{1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4x} = \frac{3 \cdot 1^2 - 3}{4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1} =$$

$$= \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{12x^2 - 4} = \frac{6 \cdot 1}{12 \cdot 1^2 - 4} = \frac{6}{12 - 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

B Dadas las rectas $s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$, y $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-a}{a-1} = \frac{z-3}{3}$

a) Calcula el valor de a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

En el caso de que r y s se corten:

b) Calcula las coordenadas del punto de intersección de las rectas r y s.

c) Halla la ecuación del plano que determinan las rectas r y s.

a) Si son perpendiculares lo son sus vectores directores y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (4\,,-2\,,2) \equiv (2\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\,,a-1\,,3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (2\,,-1\,,1)\cdot(1\,,a-1\,,3) = 0$$

$$2 - a + 1 + 3 = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6$$

b) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (4\,,-2\,,2) \equiv (2\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\,,a-1\,,3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (2\,,-1\,,1)\cdot(1\,,a-1\,,3) = 0$$

$$\begin{cases} s \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = 1 \\ 2\lambda + 5\mu = -5 \\ 2\lambda - 3\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación problema B del Cuarto Bloque

$$Para\ que\ sea\ Compatible\ Determinado \Rightarrow |A/B| = 0 \Rightarrow$$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 60 + 10 - 6 - 10 - 60 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & 10 \\ -4 & 6 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-\mu = 1 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow Punto\ de\ corte \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 + (-1) \\ y = 6 + 5 \cdot (-1) \\ z = 3 + 3 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow P(0\ ,1\ ,0)$$

c) Para determinar el plano π que contiene a **r** y **s** contamos con sus vectores directores y con el vector formado por el punto **P** de corte y el punto **G**, estos tres vectores son coplanarios y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nula y la ecuación del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (2\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\ ,5\ ,3) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (0\ ,1\ ,0) = (x\ ,y-1\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-3x + y - 1 + 10z + z - 5x - 6y + 6 = 0 \Rightarrow -8x - 5y + 11z + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 8x + 5y - 11z - 5 = 0$$