PRIMER BLOQUE

A La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3 - t)$ donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?.

b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?.

c) Representa gráficamente la función capacidad de concentración.

a)

$$f'(t) = 300 \cdot [(3-t)-t] = 300 \cdot (3-2t) \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow 300 \cdot (3-2t) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 300 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 3-2t > 0 \Rightarrow -2t > -3 \Rightarrow 2t < 3 \Rightarrow t < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Crecimiento \Rightarrow 0\ h < t \leq \dfrac{3}{2}\ h \\ Derecimiento \Rightarrow t > \dfrac{3}{2}\ h \end{cases} \Rightarrow$$

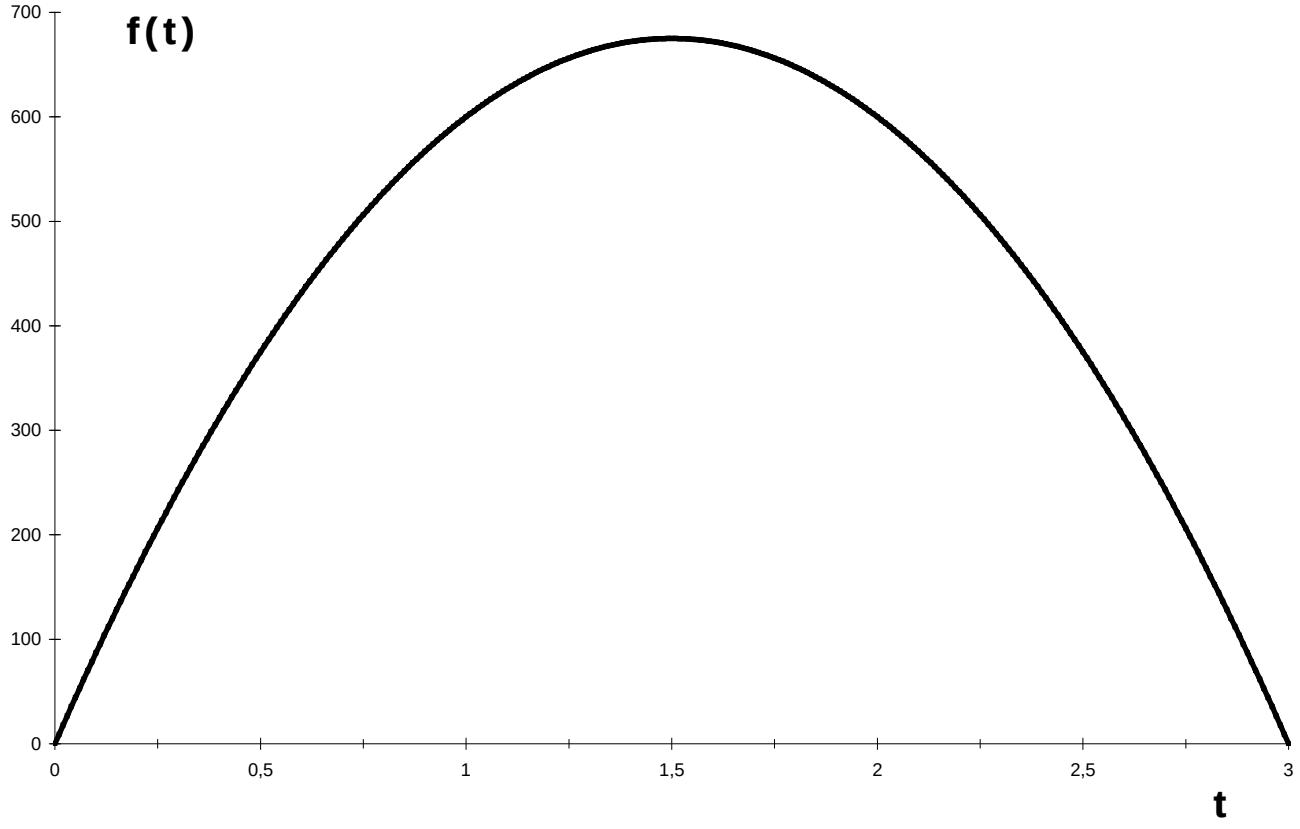
$$f'(t) = 0 \Rightarrow 300 \cdot (3-2t) = 0 \Rightarrow 3-2t = 0 \Rightarrow 3 = 2t \Rightarrow t = \frac{3}{2}\ h$$

b)

$$f'(t) = 300 \cdot (3-2t) \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow 300 \cdot (3-2t) = 0 \Rightarrow 3-2t = 0 \Rightarrow 2t = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2}\ h$$

$$f''(t) = 300 \cdot (-2) = -600 < 0 \Rightarrow Máximo$$

c)



B Sea π el plano que pasa por los puntos (1,0,0), (0,1,1) y (1,1,1); A el punto (1,2,3) y B el simétrico de A respecto del plano π.

a) Halla ecuación de la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por el punto (2,2,2).

a) Previamente tenemos que determinar el plano π, este se halla formando los vectores PQ, PR y PG, siendo G el punto generador del plano y P, Q y R los puntos dados, como los tres vectores son coplanarios y el ultimo combinación lineal de los otros dos,el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

Hallaremos una recta **r** que pasando por **A** sea perpendicular al plano π, como el vector director de este es perpendicular a él este será el vector director de dicha recta.

Una vez obtenida la recta **r** hallaremos el punto **C** de corte de ella con el plano que es el punto medio entre **A** y su simétrico **B**

Hallado **C**, obtendremos el vector director de la recta **t** que es el que une **A** con **C**

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0,1,1)-(1,0,0) = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{PR} = (1,1,1)-(1,0,0) = (0,1,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(1,0,0) = (x-1,y,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)-z-(x-1)+y=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv y-z=0$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (0,1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ C \Rightarrow (2+\lambda)-(3-\lambda)=0 \Rightarrow -1+2\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

$$C\begin{cases} x=1 \\ y=2+\frac{1}{2} \\ z=3-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(0,\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{AC} = \left(0,\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)-(1,2,3) = \left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \equiv (2,-1,1)$$

$$t \equiv \begin{cases} x=1+2\mu \\ y=2-\mu \\ z=3+\mu \end{cases}$$

b) Es una recta **s** con el mismo vector director que **t**

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_t} = (2,-1,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2+2\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=2+\alpha \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A Calcula $\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx$

$$x^3-3x+2=0 \Rightarrow Por\ Ruffini \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}=\frac{x^2-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+2)}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow$$

$$A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2=x^2-2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow A(1-1)(1+2)+B(1+2)+C(1-1)^2=1^2-2 \Rightarrow 3B=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{3} \\ x=-2 \Rightarrow A(x-1)(-2+2)+B(-2+2)+C(-2-1)^2=(-2)^2-2 \Rightarrow 9C=2 \Rightarrow C=\frac{2}{9} \Rightarrow \\ x=0 \Rightarrow A(0-1)(0+2)+B(0+2)+C(0-1)^2=0^2-2=-2A+2B+C=-2 \end{cases}$$

$$-2A+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{9}=-2 \Rightarrow -2A=-2+\frac{2}{3}-\frac{2}{9} \Rightarrow -2A=\frac{-18+6-2}{9} \Rightarrow -2A=\frac{-14}{9} \Rightarrow A=\frac{7}{9}$$

$$\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}=\frac{\frac{7}{9}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{2}{9}}{(x+2)} \Rightarrow$$

$$I=\int\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx=\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{7}{9}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{2}{9}\int\frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x+2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I=\frac{7}{9}\ln t-\frac{1}{3}\int t^{-2}dt+\frac{2}{9}\ln u=\frac{1}{9}\ln t^7u^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-1)}\cdot t^{-1}=\ln\sqrt[9]{(x-1)^7(x+2)^2}+\frac{1}{3\cdot(x-1)}+K$$

B Resuelve la ecuación matricial $XA - 2B + 3C = D$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

$$XA = D + 2B - 3C \Rightarrow XAA^{-1} = (D + 2B - 3C)A^{-1} \Rightarrow XI = (D + 2B - 3C)A^{-1} \Rightarrow X = (D + 2B - 3C)A^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (adj\ A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ D + 2B - 3C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 23 & -28 \\ -28 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} & -14 \\ -14 & 21 \end{pmatrix}$$

TERCER BLOQUE

A El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.

a) Halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.

b) Calcula el área de dicho recinto.

El campo tiene una longitud **L**, uno de los lados es tapia, y una anchura **A.** Buscaremos la solución para el máximo área.

a)

$$\begin{cases} 300 = L + 2A \Rightarrow L = 300 - 2A \\ S = LA \end{cases} \Rightarrow S = (300 - 2A)A \Rightarrow S' = \frac{dS}{dA} = -2A + (300 - 2A) = 300 - 4A \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow 300 - 4A = 0 \Rightarrow 4(75 - A) = 0 \Rightarrow 75 - A = 0 \Rightarrow A = 75 \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{dA^2} = -4 < 0 \Rightarrow Máximo$$

$$\begin{cases} A = 75\ m. \\ L = 300 - 2 \cdot 75 = 300 - 150 = 150\ m \end{cases}$$

b)

$$S_{max} = LA = 150 \cdot 75 = 11250\ m^2$$

B Considera el plano $\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$

a) Halla los valores de a y b para que la recta r esté contenida en π.

b) ¿Existe algún valor de a y de b para que la recta r sea perpendicular al plano π?.

a) Primero, el punto que determina la ecuación de la recta esta contenido en el plano; segundo el vector dirección de la recta es perpendicular al del plano y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} a \cdot 3 + 2.1 - 4 \cdot (-3) + b = 0 \Rightarrow 3a + b + 14 = 0 \\ \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,2\ ,-4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (4\ ,-4\ ,1) \cdot (a\ ,2\ ,-4) = 0 \Rightarrow 4a - 8 - 4 = 0 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$3 \cdot 3 + b + 14 = 0 \Rightarrow b + 23 = 0 \Rightarrow b = -23$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

b) Para que sea perpendicular la recta su vector director es paralelo al del plano y por ello son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,2\ ,-4) \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{-4} \Rightarrow \textit{No hay valor a que haga a la recta perpendicular al plano}$$

CUARTO BLOQUE

A Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x+2|$.

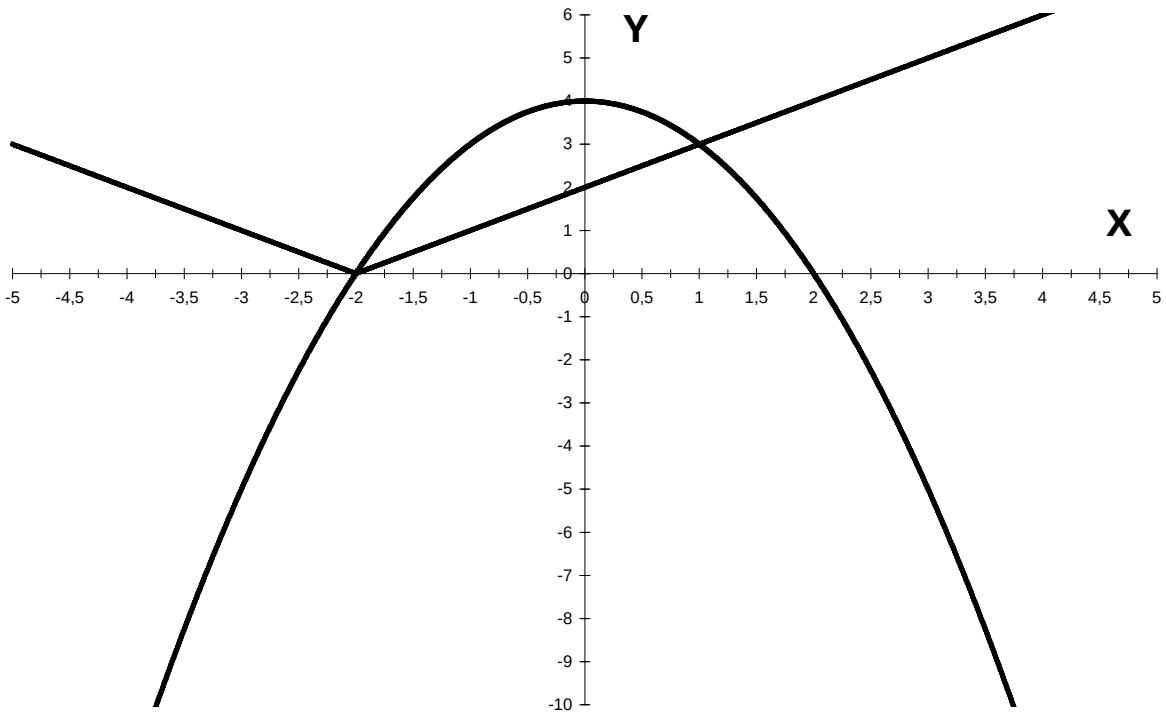
a) Dibuja ambas gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

a) y b)

$$x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow \begin{cases} -x-2 & si \quad x<-2 \\ x+2 & si \quad x \geq -2 \end{cases}$$



$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow -x^2+4 = x+2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \int_{-2}^{1}\left(-x^2+4\right)dx - \int_{-2}^{1}(x+2)\,dx = \int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx = -\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-2}^{1} - \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{1} + 2\cdot\left[x\right]_{-2}^{1}$$

$$A = -\frac{1}{3}\cdot\left[1^3-(-2)^3\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[1^2-(-2)^2\right] + 2\cdot\left[1-(-2)\right] = -\frac{9}{3}+\frac{3}{2}+2\cdot 3 = -3+\frac{3}{2}+6 = \frac{9}{2}\,u^2$$

B Halla el valor del parámetro k para que el sistema $\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+3y+z = 5 \\ 4x+5y+3z = k \end{cases}$ sea compatible indeterminado.

Calcula la solución general y verifica si las ternas (1,1,0), (-5,4,3), (1,2,-1) son soluciones particulares.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9+4+10-12-5-6 = 0 \Rightarrow \text{Una ecuación, al menos, es combinación lineal de las demás}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & k \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-8 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-8-1 \end{array}\right) \Rightarrow k-9=0 \Rightarrow k=9 \Rightarrow$$

$$\text{Para } k=9 \text{ la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos} \Rightarrow \text{Sist.Compatible Indeterminado}$$

$$y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x+1+z+1=2 \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-\lambda, 1+\lambda, \lambda)$$

$$(1,1,0) = (-\lambda, 1+\lambda, \lambda) \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ 1 = 1+\lambda \\ 0 = \lambda \end{cases} \Rightarrow -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Incompatible} \Rightarrow \text{No es solución particular}$$

$$(-5,4,3) = (-\lambda, 1+\lambda, \lambda) \Rightarrow \begin{cases} -5 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 5 \\ 4 = 1+\lambda \\ 3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow 5 \neq 3 \Rightarrow \text{Incompatible} \Rightarrow \text{No es solución particular}$$

$$(-1,2,1) = (-\lambda, 1+\lambda, \lambda) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \\ 2 = 1+\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Solución particular}$$