PRIMER BLOQUE

A La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{L(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es derivable en el punto x=0. Calcula cuánto valen las constantes b y c. (L= logaritmo neperiano).

Para ser derivable, inicialmente tiene que ser continua

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^2 + b\cdot 0 + c = c \\ \lim\limits_{x\to 0^0} f(x) = \dfrac{L(1+0)}{0} = \dfrac{L\,1}{0} = \dfrac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim\limits_{x\to 0^0} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim\limits_{x\to 0^0} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+0} = 1 \end{cases}$$

Para que sea continua **c = 1**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x - (1+x)\,L(1+x)}{x^2(1+x)} & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2\cdot 0 + b = b \\ \lim\limits_{x\to 0^0} f(x) = \dfrac{0 - (1+0)\,L(1+0)}{0^2(1+0)} = \dfrac{0}{0} \end{cases}$$

$$b = \lim_{x\to 0^0} \frac{x - (1+x)\,L(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0^0} \frac{1 - \left[L(1+x) + \frac{1+x}{1+x}\right]}{2x(1+x) + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^0} \frac{1 - L(1+x) - 1}{2x(1+x) + x^2} = \lim_{x\to 0^0} \frac{-L(1+x)}{2x + 3x^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0^0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{1+0}}{2 + 6\cdot 0} = \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2} \Rightarrow Para\ ser\ derivable \Rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

B Considera el plano $\pi \equiv x - y + 1 = 0$ y el punto A(2,0,1).

a) Determina la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto A

b) Halla las coordenadas del punto B que es simétrico del punto A respecto del plano π.

a) El vector director de la recta es el del plano, ya que este es perpendicular al plano

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,, -1\,, 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

b) Hallaremos una recta **r** que pasando por **A** sea perpendicular al plano π, como el vector director de este es perpendicular a él este será el vector director de la recta. Se hallo en el apartado a)

Una vez obtenida la recta **r** hallaremos el punto **Q** de corte de ella con el plano que es el punto medio entre **A** y su simétrico **B**

Hallemos el punto Q

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \pi \equiv x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 + \lambda - (-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow 3 + \lambda + \lambda = 0 \Rightarrow 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$$

$$Q \begin{cases} x = 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) \\ y = -\left(-\frac{3}{2}\right) \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow 2 + x_B = 1 \Rightarrow x_B = -1 \\ \frac{3}{2} = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow 2y_B = 6 \Rightarrow y_B = 3 \\ 1 = \frac{1 + z_B}{2} \Rightarrow z_B + 1 = 2 \Rightarrow z_B = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-1, 3, 1)$$

SEGUNDO BLOQUE

A Un solar rectangular de **11.250** m^2 se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura ) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.

Siendo **L** la longitud total y **A** el ancho

$$\begin{cases} 11250 = LA \Rightarrow L = \frac{11250}{A} \\ P = 2L + 4A \end{cases} \Rightarrow P = 2 \cdot \frac{11250}{A} + 4A = \frac{22500 + 4A^2}{A} = 4\frac{5625 + A^2}{A}$$

$$P' = \frac{dP}{dA} = 4\frac{2A \cdot A - (5625 + A^2)}{A^2} = 4\frac{2A^2 - 5625 - A^2}{A^2} = 4\frac{A^2 - 5625}{A^2} \Rightarrow Si\ P' = 0 \Rightarrow$$

$$4\frac{A^2 - 5625}{A^2} = 0 \Rightarrow A^2 - 5625 = 0 \Rightarrow A^2 = 5625 \Rightarrow A = \pm\sqrt{5625} \Rightarrow \begin{cases} A = 75 \\ A = -75 \Rightarrow No\ sol. \end{cases}$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dA^2} = 4\frac{2A \cdot A^2 - 2A(A^2 - 5625)}{A^4} = 8\frac{A^2 - (A^2 - 5625)}{A^3} = 8\frac{A^2 - A^2 + 5625}{A^3}$$

$$P'' = \frac{45000}{A^3} \Rightarrow P''(75) = \frac{45000}{75^3} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} A = 75\ m. \\ L = \frac{11250}{75} = 150\ m. \end{cases}$$

B Discute según los valores del parámetro a el sistema $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

¿Para qué valores de a se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

Aplicar la regla de Cramer supone que el Sistema es Compatible Determinado

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a^3-3a+2=0 \Rightarrow por\ Ruffini$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow a^3-3a+2=0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Compatible\ Deter\min a$$

Se puede aplicar la regla de Cramer

Si $a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow$$

$$z = \frac{4}{0} \Rightarrow No\ existe\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Si $a=1$

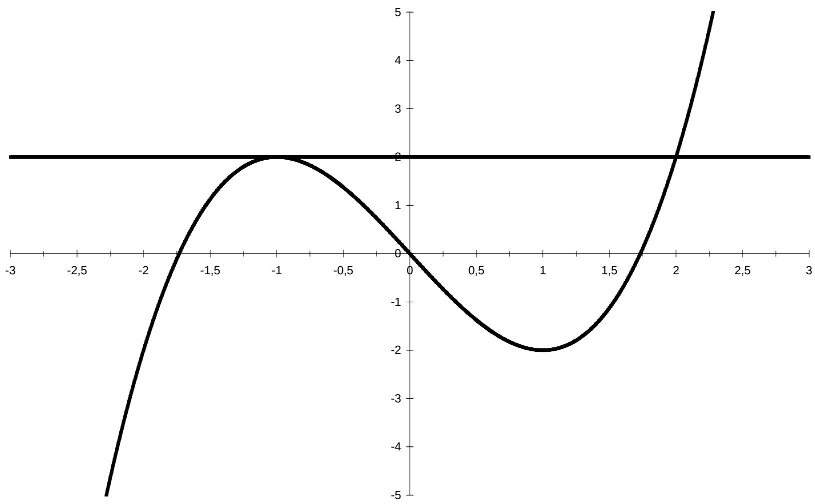
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{0} \Rightarrow No\ existe\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

TERCER BLOQUE

A Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa x=-1.

Calcula el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow \begin{cases} y(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = -1 + 3 = 2 \\ m = y'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 0\cdot[x - (-1)] \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$



$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 3\right)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2\,(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{0} 2\,dx - \int_{-1}^{0} \left(x^3 - 3x\right) dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} 2\,dx + \left| \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(x^3 - 3x\right) dx \right| + \int_{\sqrt{3}}^{2} 2\,dx - \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(x^3 - 3x\right) dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} 2\,dx - \int_{-1}^{0} \left(x^3 - 3x\right) dx - \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(x^3 - 3x\right) dx - \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(x^3 - 3x\right) dx = \int_{-1}^{2} 2\,dx - \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x\right) dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} 2\,dx - \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 3x\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(2 - x^3 + 3x\right) dx = 2 \cdot [x]_{-1}^{2} - \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_{-1}^{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$A = 2 \cdot [2 - (-1)] - \frac{1}{4} \cdot \left[2^4 - (-1)^4\right] + \frac{3}{2} \cdot \left[2^2 - (-1)^2\right] = 2 \cdot 3 - \frac{15}{4} + \frac{9}{2} = \frac{24 - 15 + 18}{4} = \frac{27}{4}\,u^2$$

B Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,0,2), es paralelo a la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = z - 3$ y perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$.

El plano α queda determinado por el vector de la recta **r**, el vector director del plano π y el vector determinado por **P** y **G**, siendo **G** el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y el ultimo vector es combinación lineal de los otros dos y, debido a ello, el determinante de la matriz que forman lo tres es nulo y la ecuación que se busca

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 3, 1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 0, 2) = (x-1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3\,(x-1) + 2y - 2\,(z-2) - 6\,(z-2) + (x-1) - 2y = 0 \Rightarrow 4\,(x-1) - 8\,(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1) - 2\,(z-2) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - 2z + 3 = 0$$

CUARTO BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$. Calcula: a) Los máximos y mínimos relativos. b) Las asíntotas. c) Los puntos de inflexión.

a)

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^3-3x^2\left(x^2-1\right)}{x^6}=\frac{2x^2-3\left(x^2-1\right)}{x^4}=\frac{2x^2-3x^2+3}{x^4}=\frac{-x^2+3}{x^4}$$

$$Si\ \ f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+3}{x^4}=0\Rightarrow -x^2+3=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot x^4-4x^3\left(-x^2+3\right)}{x^8}=\frac{-2x^2-4\left(-x^2+3\right)}{x^5}=\frac{-2x^2+4x^2-12}{x^5}$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-12}{x^5}\Rightarrow\begin{cases}f''\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2-12}{\left(-\sqrt{3}\right)^5}=\dfrac{2\cdot 3-12}{-9\sqrt{3}}=\dfrac{-6}{-9\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}>0\Rightarrow Min.\\ f''\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-12}{\left(\sqrt{3}\right)^5}=\dfrac{2\cdot 3-12}{9\sqrt{3}}=\dfrac{-6}{9\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}>0\Rightarrow Min\end{cases}$$

$$\begin{cases}Mínimo\ relativo\Rightarrow x=-\sqrt{3}\Rightarrow\ f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)^2-1}{\left(-\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{3-1}{-3\sqrt{3}}=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\\ Máximo\ relativo\Rightarrow x=\sqrt{3}\Rightarrow\ f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{3-1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\end{cases}$$

b)

$$x^3=0\Rightarrow x=0\Rightarrow\ f(0)=\frac{0^2-1}{0^3}=-\frac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow\ Asíntota\ vertical\Rightarrow x=0$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L´Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x}=\frac{2}{\infty}=0$$

Existe asíntota horizontal $y=0$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L´Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x}=\frac{2}{-\infty}=0$$

Existe asíntota horizontal $y=0$ *cuando* $x\to-\infty$

Continuación del Problema A del Cuarto Bloque

b)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L´Hopital}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to \infty$

$$y = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L´Hopital}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{4x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$

c)

$$f''(x) = \frac{2x^2-12}{x^5} = 2\frac{(x^2-6)}{x^5} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2\frac{(x^2-6)}{x^5} = 0 \Rightarrow x^2-6=0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \frac{4x\cdot x^5 - 5x^4(2x^2-12)}{x^{10}} = \frac{4x^2 - 5(2x^2-12)}{x^6}$$

$$f'''(x) = \frac{4x^2 - 10x^2 + 60}{x^6} = \frac{-6x^2+60}{x^6} \Rightarrow \begin{cases} f'''(-\sqrt{6}) = \dfrac{-6\cdot(-\sqrt{6})^2+60}{(-\sqrt{6})^6} = \dfrac{-36+60}{6^3} \neq 0 \\ f'''(\sqrt{6}) = \dfrac{-6\cdot(\sqrt{6})^2+60}{(\sqrt{6})^6} = \dfrac{-36+60}{6^3} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Punto de inflexión} \Rightarrow x = -\sqrt{6} \Rightarrow f(-\sqrt{6}) = \frac{(-\sqrt{6})^2-1}{(-\sqrt{6})^3} = \frac{6-1}{-6\sqrt{6}} = -\frac{5}{6\sqrt{6}} = -\frac{5\sqrt{6}}{36}$$

$$\text{Punto de inflexión} \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow f(\sqrt{6}) = \frac{(\sqrt{6})^2-1}{(\sqrt{6})^3} = \frac{6-1}{6\sqrt{6}} = \frac{5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{36}$$

B Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$.

a)

$$3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & x \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & x \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15$$

b)

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 5 + 10 \cdot 0 = \frac{25}{3}$$