PRIMER BLOQUE

A Considera la función f(x) definida para $x \neq 0$ por la relación: $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+4}{x}$

a) Halla las ecuaciones de sus asíntotas.

b) Determina los máximos y mínimos locales.

c) Dibuja la gráfica de f(x).

a)

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{4\cdot 0^2+3\cdot 0+4}{0}=\frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=0$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+3}{1}=\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+4}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+3}{1}=-\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+3}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{2}=4$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{x}-4x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1}=3$$

Existe asíntota oblicua $y=4x+3$ cuando $x\to\infty$

Continuación del Problema A del Primer Bloque

a)Continuación

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+4}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+3}{2x}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{2}=4$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{x}-4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{1}=3$$

Existe asíntota oblicua $y=4x+3$ *cuando* $x\to-\infty$

b)

$$f'(x)=\frac{(8x+3)x-(4x^2+3x+4)}{x^2}=\frac{8x^2+3x-4x^2-3x-4}{x^2}=\frac{4x^2-4}{x^2}=4\frac{x^2-1}{x^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 4\frac{x^2-1}{x^2}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}\Rightarrow$$

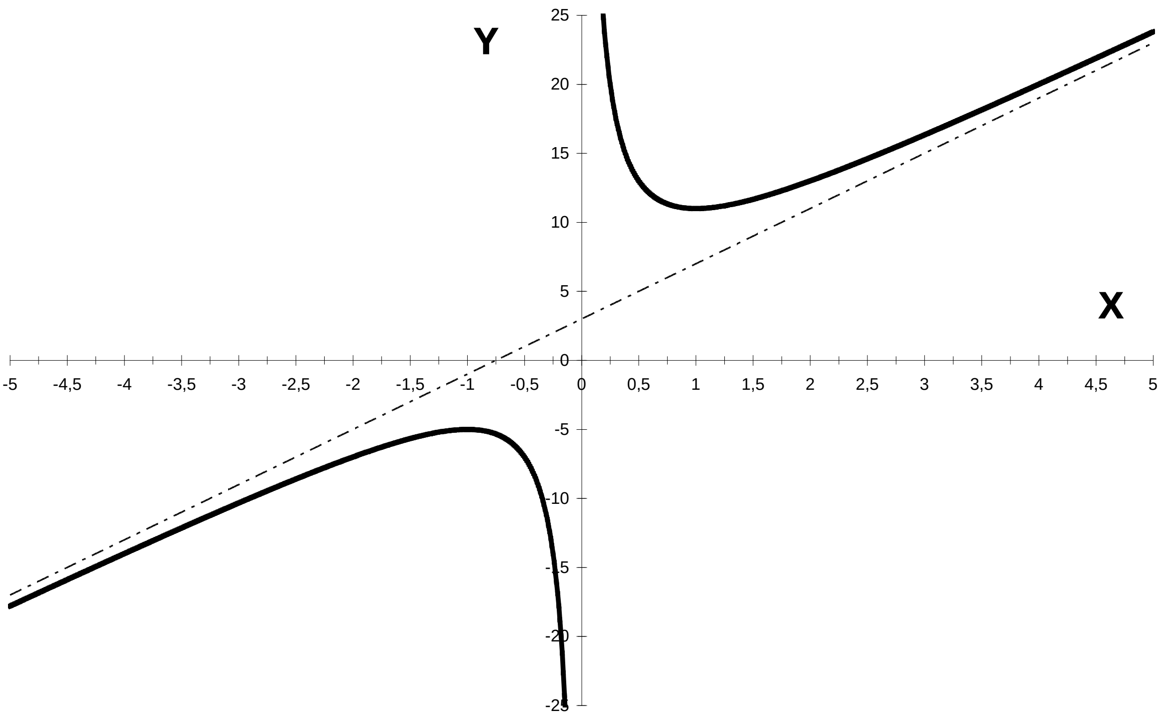
$$f''(x)=4\frac{2x\cdot x^2-2x(x^2-1)}{x^4}=4\frac{2x^2-2x^2+2}{x^3}=\frac{8}{x^3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f''(-1)=\frac{8}{(-1)^3}=-8<0\Rightarrow Máximo\\ f''(1)=\frac{8}{1^3}=8>0\Rightarrow Mínimo\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}Máximo\ relativo\Rightarrow x=-1\Rightarrow f(-1)=\frac{4\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+4}{(-1)}=\frac{4-3+4}{(-1)}=-5\\ Mínimo\ relativo\Rightarrow x=1\Rightarrow f(-1)=\frac{4\cdot 1^2+3\cdot 1+4}{1}=\frac{4+3+4}{1}=11\end{cases}$$

Continuación del Problema A del Primer Bloque

c)



B Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$

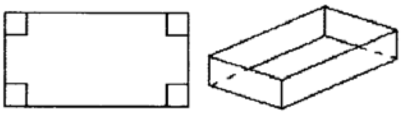
$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2 & -2x & x+3 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x-1 & 3x \\ 2 & -2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot \begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2x^2 \cdot (-4x+2-6) = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot (-4x-4) = 0 \Rightarrow -8x^2 \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A **Con una lámina rectangular de 30 cm de largo por 15 cm de ancho se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recortan unos cuadrados de los vértices y se doblan en ángulo recto las pestañas resultantes tal y como muestra la figura.**



a) Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen sea máximo.

b) Calcula el volumen máximo.

Siendo H el lado del cuadrado que además es la altura de la caja

$$V = (30-2H)\cdot(15-2H)\cdot H \Rightarrow$$

$$V' = \frac{dV}{dH} = (-2)\cdot(15-2H)\cdot H + (-2)\cdot(30-2H)\cdot H + (30-2H)\cdot(15-2H) \Rightarrow$$

$$V' = -30H + 4H^2 - 60H + 4H^2 + 450 - 60H - 30H + 4H^2 = 12H^2 - 180H + 450$$

$$V' = 12H^2 - 180H + 450 = 6\cdot\left(2H^2 - 30H + 75\right) \Rightarrow$$

$$V' = 0 \Rightarrow 6\cdot\left(2H^2 - 30H + 75\right) = 0 \Rightarrow 2H^2 - 30H + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4\cdot 2\cdot 75 = 900 - 600 = 300 > 0 \Rightarrow H = \frac{30 \pm \sqrt{300}}{2\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{30+10\sqrt{3}}{4} \\ H = \dfrac{30-10\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$V'' = \frac{d^2V}{dH^2} = 6\cdot(4H - 30) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V''\left(\dfrac{30+10\sqrt{3}}{4}\right) = 6\cdot\left[4\left(\dfrac{30+10\sqrt{3}}{4}\right) - 30\right] = 6\cdot\left(30+10\sqrt{3}-30\right) = 10\sqrt{3} > 0 \Rightarrow Mínimo \\ V''\left(\dfrac{30-10\sqrt{3}}{4}\right) = 6\cdot\left[4\left(\dfrac{3010\sqrt{3}}{4}\right) - 30\right] = 6\cdot\left(30-10\sqrt{3}-30\right) = -10\sqrt{3} < 0 \Rightarrow Máximo \end{cases}$$

$$H = \frac{30-10\sqrt{3}}{4} = \frac{15-5\sqrt{3}}{2}\ cm$$

$$b)\quad V = \left(30 - 2\frac{15-5\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(15 - 2\frac{15-5\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{15-5\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \left(30 - 15 + 5\sqrt{3}\right)\cdot\left(15 - 15 + 5\sqrt{3}\right)\cdot\frac{15-5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(15+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(15+5\sqrt{3}\right)$$

$$V = \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(15^2 - 5^2\cdot 3\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}(225-75) = \frac{5\cdot 150\cdot\sqrt{3}}{2} = 5\cdot 75\cdot\sqrt{3} = 375\cdot\sqrt{3}\ cm^3$$

B Considera el triángulo de vértices A(0,0,1), $B(3,-\sqrt{30},0)$, $C(3,\sqrt{30},0)$

a) Calcula cuánto vale cada uno de sus ángulos.

b) Justifica si se trata de un triángulo isósceles.

a) Calcularemos los ángulos formados por los vectores **AB** y **AC**; **BA** y **BC**; **CA** y **CB** que nos darán los ángulos pedidos.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(3,-\sqrt{30},0\right)-\left(0,0,1\right)=\left(3,-\sqrt{30},-1\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(3,\sqrt{30},0\right)-\left(0,0,1\right)=\left(3,\sqrt{30},-1\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(3,-\sqrt{30},-1\right)\cdot\left(3,\sqrt{30},-1\right)}{\sqrt{3^2+\left(-\sqrt{30}\right)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+\left(\sqrt{30}\right)^2+(-1)^2}} = \frac{9-30+1}{\sqrt{9+30+1}\cdot\sqrt{9+30+1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-20}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{40}} = -\frac{20}{40} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^o = \frac{2\pi}{3}\ rad$$

$$Como\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|\ el\ tríangulo\ es\ isóceles.$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\left(3,-\sqrt{30},-1\right)=\left(-3,\sqrt{30},1\right) \\ \overrightarrow{BC} = \left(3,\sqrt{30},0\right)-\left(3,-\sqrt{30},0\right)=\left(0,2\sqrt{30},0\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{\left(-3,\sqrt{30},1\right)\cdot\left(0,2\sqrt{30},0\right)}{\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{30}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(2\sqrt{30}\right)^2+0^2}} = \frac{0+60+0}{\sqrt{9+30+1}\cdot\sqrt{120}}$$

$$\cos\beta = \frac{60}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{120}} = \frac{60}{\sqrt{4800}} = \frac{60}{10\sqrt{48}}\frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\beta = arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^o = \frac{\pi}{6}\ rad$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\left(3,\sqrt{30},-1\right)=\left(-3,-\sqrt{30},1\right) \\ \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\left(0,2\sqrt{30},0\right)=\left(0,-2\sqrt{30},0\right) \end{cases}$$

$$\cos\gamma = \frac{\left(-3,-\sqrt{30},1\right)\cdot\left(0,-2\sqrt{30},0\right)}{\sqrt{(-3)^2+\left(-\sqrt{30}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(-2\sqrt{30}\right)^2+0^2}} = \frac{60}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{1200}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^o = \frac{\pi}{6}\ rad$$

TERCER BLOQUE

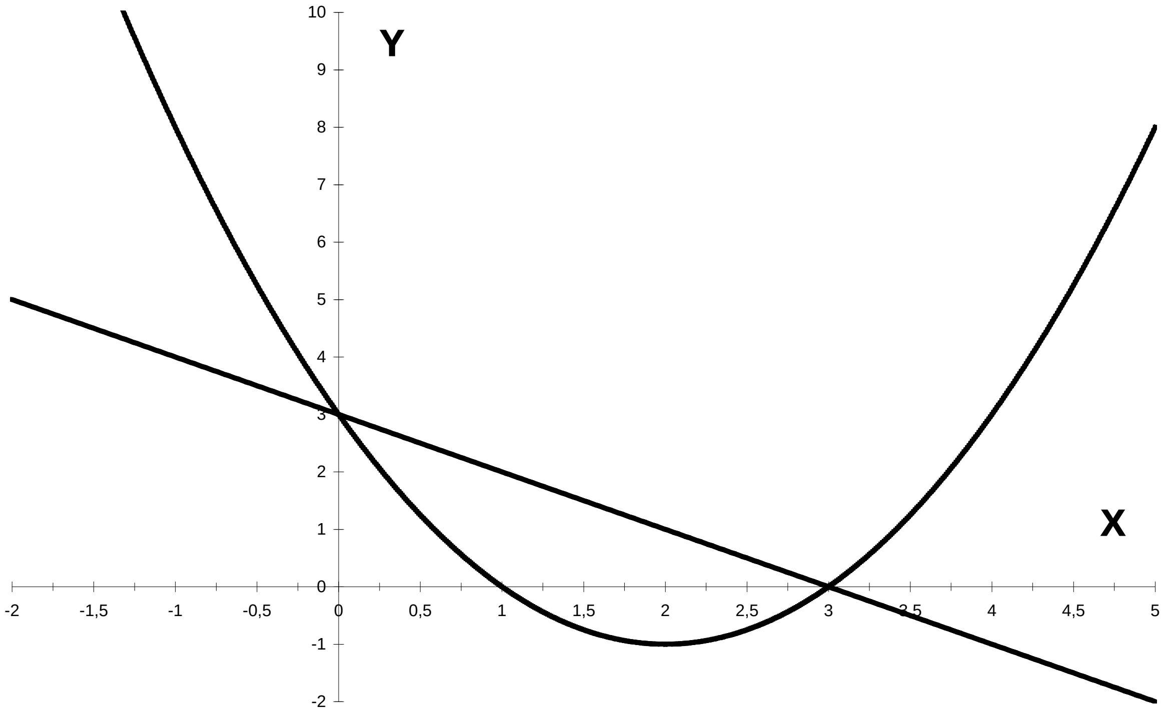
A Dada la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ y la recta $y = -x + 3$

a) Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

a)



c)

$$A = \int_0^3 (-x+3)\,dx - \int_0^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx = -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3 + 3\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^3$$

$$A = -\frac{1}{3}\left(3^3 - 0^3\right) + \frac{3}{2}\left(3^2 - 0^2\right) = -\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}\,u^2$$

B Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$.

b) ¿Existe la inversa de la matriz X?. Justifica tu respuesta.

a)

$$AX = I - A^2 \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\left(I - A^2\right) \Rightarrow IX = A^{-1}I - A^{-1}AA \Rightarrow X = A^{-1}I - IA \Rightarrow X = A^{-1}I - A$$

$$X = A^{-1} - A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b)

$$Existe\ inversa\ si\ |X| \neq 0 \Rightarrow |X| = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{9} + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \neq 0 \Rightarrow Existe\ X^{-1}$$

CUARTO BLOQUE

A Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Determina los intervalos de continuidad. b) Determina los intervalos de derivabilidad.

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{4}{0^2+2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^2 - 4\cdot 0 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow Continua\ en\ \forall x \in \Re$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{8x}{\left(x^2+2\right)^2} & si \quad x < 0 \\ 2x - 4 & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -\dfrac{8\cdot 0}{\left(0^2+2\right)^2} = \dfrac{0}{4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2\cdot 0 - 4 = -4 \end{cases}$$

$$0 = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = -4 \Rightarrow Es\ derivable\ para\ \forall x \in \Re - \{0\}$$

B Dados los puntos A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,3), sean A' el simétrico de A respecto de B, B' el simétrico de B respecto de C y C' el simétrico de C respecto de A.

Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A', B', y C'.

$$Punto\ A' \Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{1+x_{A'}}{2} \Rightarrow 1+x_{A'} = 0 \Rightarrow x_{A'} = -1 \\ 2 = \dfrac{0+y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 4 \\ 0 = \dfrac{0+z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-1\ ,4\ ,0)$$

$$Punto\ B' \Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{0+x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{B'} = 0 \\ 0 = \dfrac{2+y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{B'} + 2 = 0 \Rightarrow y_{B'} = -2 \Rightarrow B'(0\ ,-2\ ,6) \\ 3 = \dfrac{0+z_{B'}}{2} \Rightarrow z_{B'} = 6 \end{cases}$$

$$Punto\ C' \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{0+x_{B'}}{2} \Rightarrow x_{C'} = 2 \\ 0 = \dfrac{0+y_{B'}}{2} \Rightarrow y_{c'} = 0 \\ 0 = \dfrac{3+z_{B'}}{2} \Rightarrow 3+z_{C'} = 0 \Rightarrow z_{C'} = -3 \end{cases} \Rightarrow C'(2\ ,0\ ,-3)$$

Los vectores A'B', A'C' y A'G, siendo G el punto genérico del plano son coplanarios (están en el mismo plano) y el último es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman es nula y la ecuación del plano π pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = (0\ ,-2\ ,6) - (-1\ ,4\ ,0) = (1\ ,-6\ ,6) \\ \overrightarrow{A'C'} = (2\ ,0\ ,-3) - (-1\ ,4\ ,0) = (3\ ,-4\ ,-3) \\ \overrightarrow{A'G} = (x\ ,y\ ,z) - (-1\ ,4\ ,0) = (x+1\ ,y-4\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z \\ 1 & -6 & 6 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$18\ (x+1) + 18\ (y-4) - 4z + 18z + 24\ (x+1) + 3\ (y-4) = 0 \Rightarrow$$

$$42\ (x+1) + 21\ (y-4) + 14z = 0 \Rightarrow 6\ (x+1) + 3\ (y-4) + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$