PRIMER BLOQUE

A Calcula $\int (x^2+2x+1)Lx dx$ (L= logaritmo neperiano).

$$I=\int\left(x^2+2x+1\right)L\,x\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)L\,x-\int\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\frac{dx}{x}$$

$$\begin{cases} L\,x=u\Rightarrow \dfrac{dx}{x}=du \\ \int\left(x^2+2x+1\right)dx=dv\Rightarrow v=\int\left(x^2+2x+1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2}+x=\dfrac{x^3}{3}+x^2+x \end{cases}$$

$$I=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)L\,x-\int\left(\frac{x^2}{3}+x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)L\,x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$$

$$I=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)L\,x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+x+K$$

B Calcula x para que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u}(3,-3,1)$, $\vec{v}(2,1,2)$ y $\vec{w}(1,5,x)$ sea igual a 30 unidades de volumen. Halla el área de la cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{u}\cdot\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|\right|\Rightarrow \vec{u}\cdot\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|=\begin{vmatrix}3 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 5 & x\end{vmatrix}=3x-6+10-1-30+6x=9x-27\Rightarrow$$

$$30=\frac{1}{6}\cdot\left(9x-27\right)\Rightarrow 180=9x-27\Rightarrow 9x=207\Rightarrow x=\frac{207}{9}=23\ u$$

$$Superficie\ cara\ det\,er\,min\,ada\ por\ \vec{u}\ y\ \vec{v}=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\Rightarrow$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}3 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{vmatrix}=3\vec{k}-6\vec{i}+2\vec{j}-\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}=-7\vec{i}-4\vec{j}+9\vec{k}\Rightarrow$$

$$S=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-4)^2+9^2}=\sqrt{49+16+81}=\sqrt{146}\ u^2$$

SEGUNDO BLOQUE

A Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Construimos con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

Los lados iguales son **A** y la base, diferente, **B** y su altura **H**

$$\begin{cases} 2A + B = 5 \Rightarrow B = 5 - 2A \\ \left(\frac{B}{2}\right)^2 + H^2 = A^2 \Rightarrow H^2 = A^2 - \frac{B^2}{4} = A^2 - \frac{(5-2A)^2}{4} = \frac{4A^2 - 25 + 20A - 4A^2}{4} = \frac{-25+20A}{4} \\ S = \frac{1}{2} \cdot BH \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (5-2A) \frac{\sqrt{20A-25}}{2} = \frac{1}{4} \cdot (5-2A) \cdot \sqrt{20A-25} \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{dA} = \frac{1}{4} \cdot \left[(-2) \cdot \sqrt{20A-25} + \frac{20 \cdot (5-2A)}{2\sqrt{20A-25}} \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[(-2) \cdot \sqrt{20A-25} + \frac{10 \cdot (5-2A)}{\sqrt{20A-25}} \right]$$

$$S' = \frac{2}{4} \cdot \left[\frac{10 \cdot (5-2A)}{\sqrt{20A-25}} - \sqrt{20A-25} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{10 \cdot (5-2A) - 20A + 25}{\sqrt{20A-25}} \right]$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 - 20A - 20A + 25}{\sqrt{20A-25}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{75 - 30A}{\sqrt{20A-25}} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5-3A}{\sqrt{20A-25}} \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{15}{2} \cdot \frac{5-3A}{\sqrt{20A-25}} = 0 \Rightarrow 5 - 3A = 0 \Rightarrow 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dA^2} = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{(-3) \cdot \sqrt{20A-25} - \frac{20 \cdot (5-3A)}{2\sqrt{20A-25}}}{(20A-25)} \right] = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{(-3) \cdot \sqrt{20A-25} - \frac{10 \cdot (5-3A)}{\sqrt{20A-25}}}{(20A-25)} \right]$$

$$S'' = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{\frac{(-3) \cdot (20A-25) - 10 \cdot (5-3A)}{\sqrt{20A-25}}}{(20A-25)} \right] = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{-60A + 75 - 50 + 30A}{(20A-25)\sqrt{20A-25}} \right]$$

$$S'' = \frac{15}{2} \cdot \left[\frac{-30A + 25}{(20A-25)\sqrt{20A-25}} \right] = \frac{75}{2} \cdot \left[\frac{-6A + 5}{(20A-25)\sqrt{20A-25}} \right] \Rightarrow$$

$$S''\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{75}{2} \cdot \left[\frac{-6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + 5}{\left(20 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 25\right)\sqrt{20 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 25}} \right] = \frac{75}{2} \cdot \left[\frac{-10 + 5}{\left(\frac{100}{3} - 25\right)\sqrt{\frac{100}{3} - 25}} \right]$$

Continuación del problema A del Segundo Bloque

$$S''\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{75}{2}\cdot\left(\frac{-5}{\left(\frac{25}{3}\right)\sqrt{\frac{25}{3}}}\right)=\frac{75}{2}\cdot\left(\frac{-15}{25\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)=\frac{3\cdot(-15)\sqrt{3}}{2\cdot 5}=\frac{(-9)\sqrt{3}}{2}<0\Rightarrow Máximo$$

$$\begin{cases} A=\frac{3}{5}\,m \\ B=5-2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=5-\frac{6}{5}=\frac{19}{5}\,m. \end{cases}$$

B Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=5$

a) Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$

b) Enuncia las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

$a)$

$$\begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b & 6a+2b \\ d & 6c+2d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -b & 6a+2b \\ -d & 6c+2d \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -b & 6a \\ -d & 6c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -b & 2b \\ -d & 2d \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}+3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+(-1)\cdot 6\cdot\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}+(-1)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot 6\cdot 0+3\cdot 2\cdot 5+(-6)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+(-1)\cdot 2\cdot 0=30+6\cdot 5=30+30=60$$

TERCER BLOQUE

A Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cos 2x - \text{sen}2x}{x^3}$

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a , b]**, derivables en **(a , b)**, que cumplen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a\ , b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el intervalo **(a , b)**. Entonces, si **f(x₀) = g(x₀) = 0** y existe el $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos 2\ x - sen\ 2x}{x^3} = \frac{2\cdot 0\cdot \cos\ 2\cdot 0 - sen\ 2\cdot 0}{0^3} = \frac{0\cdot 1 - sen\ 0}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos 2\ x - 2x sen\ 2x) - 2\cdot \cos\ 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\ 2x - 4x sen\ 2x - 2\cdot \cos\ 2x}{3x^2} =$$

$$= \frac{2\cos\ 2\cdot 0 - 4\cdot 0\cdot sen\ 2\cdot 0 - 2\cdot \cos\ 2\cdot 0}{3\cdot 0^2} = \frac{2\cdot 1 - 0\cdot 0 - 2\cdot \cos\ 0}{0} = \frac{2 - 0 - 2\cdot 1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{-4sen\ 2x - 4(sen\ 2x + 2x\cos\ 2x) + 4\cdot sen\ 2x}{6x} =$$

$$= \frac{-4sen\ 2\cdot 0 - 4(sen\ 2\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot \cos\ 2\cdot 0) + 4\cdot sen\ 2\cdot 0}{6\cdot 0} = \frac{-4\cdot 0 - 4(0 + 2\cdot 0\cdot 1) + 4\cdot 0}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos\ 2x - 4(2\cos\ 2x + 2\cos\ 2x - 4x sen\ 2x) + 8\cdot \cos\ 2x}{6} =$$

$$= \frac{-8\cos\ 0 - 4(2\cos\ 0 + 2\cos\ 0 - 4\cdot 0\cdot sen\ 0) + 8\cdot \cos\ 0}{6} = \frac{-8 - 4(2 + 2 - 0) + 8}{6} =$$

$$= \frac{-8 - 4(2 + 2 - 0) + 8}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$$

B Dados los puntos A(2,0,3), B(-4,0,5) y el plano $\pi \equiv y - z = 0$. Halla la distancia entre los puntos A' y C, siendo A' el simétrico de A respecto al plano π y C el punto medio del segmento $\overline{AB}$

Hallaremos una recta **r** que pasando por **A** sea perpendicular al plano π, como el vector director de este es perpendicular a él, este será el vector director de dicha recta.

Una vez obtenida la recta **r** hallaremos el punto **P** de corte de ella con el plano que es el punto medio entre **A** y su simétrico **A'** lo que nos permitirá obtener el simétrico

Hallado el punto **C** como punto medio de **AB,** hallaremos la distancia pedida

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (0\ ,1\ ,-1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$Punto\ P\ de\ corte\ de\ la\ recta\ r\ con\ \pi \Rightarrow \lambda - (3 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

$$P \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 3 - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(2\ ,\frac{3}{2}\ ,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{A'} = 4 \Rightarrow x_{A'} = 2 \\ \frac{3}{2} = \frac{0 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 2y_{A'} = 6 \Rightarrow y_{A'} = 3 \\ \frac{3}{2} = \frac{3 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 6 + 2z_{A'} = 6 \Rightarrow z_{A'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \\ y_C = \frac{0 + 0}{2} = 0 \\ z_C = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(2\ ,3\ ,0) \\ C(-1\ ,0\ ,4) \end{cases} \Rightarrow d(A'\ ,C) = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (3 - 0)^2 + (0 - 4)^2}$$

$$d(A'\ ,C) = \sqrt{3^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{34}\ u$$

CUARTO BLOQUE

A La función $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & si\ \ 0 \le x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & si\ \ 2 \le x \le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5) y verifica que f(0)=f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

Para ser derivable, primero debe de ser continua

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = a \cdot 2 + b \cdot 2^2 = 2a + 4b \\ f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = c + \sqrt{2-1} = c + 1 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow 2a + 4b = c + 1$$

Derivable

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & si \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & si \quad 2 < x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f'(x) = a + 2b \cdot 2 = a + 4b \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2-1}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow a + 4b = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 8b = 1$$

$$\begin{cases} f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0^2 = 0 \\ f(c) = c + \sqrt{5-1} = c + 2 \end{cases} \Rightarrow c + 2 = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -2 + 1 \\ -2a - 8b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4b = -2 \Rightarrow$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow 2a + 2 = -1 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

B Considera el sistema de ecuaciones que depende de un parámetro real λ : $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 5x + \lambda y + z = 6 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Resuelve para $\lambda = 8$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 - 2\lambda + 15 - \lambda - 4 = -3\lambda + 24 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -3\lambda + 24 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{8\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Comp.\ Deter\min ado$$

Continuación del problema B del Cuarto Bloque

a)Continuación

$$Si\ \lambda = 8$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ tercera\ ecuación\ es$$

$$combinación\ lineal\ de\ las\ otras\ dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y + 3z = -2 \Rightarrow y = 2 + 3z \Rightarrow x + 2 \cdot (2 + 3z) - z = 2 \Rightarrow$$

$$x + 4 + 6z - z = 2 \Rightarrow x = -2 - 5z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (-2 - 5\lambda\ ,\ 2 + 3\lambda\ ,\ \lambda)$$