PRIMER BLOQUE

A. En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Siendo **B** la base y **H** la altura del rectángulo

$$\begin{cases} \left(\dfrac{B}{2}\right)^2 + H^2 = 10^2 \Rightarrow H^2 = 100 - \dfrac{B^2}{4} = \dfrac{400 - B^2}{4} \Rightarrow H = \sqrt{\dfrac{400 - B^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{400 - B^2}}{2} \\ A = BH \end{cases} \Rightarrow A = B\dfrac{\sqrt{400 - B^2}}{2} \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{dB} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{400 - B^2} + B\frac{-2B}{2\sqrt{400 - B^2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{400 - B^2 - B^2}{\sqrt{400 - B^2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{400 - 2B^2}{\sqrt{400 - B^2}}\right) = \frac{200 - B^2}{\sqrt{400 - B^2}} \Rightarrow$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{200 - B^2}{\sqrt{400 - B^2}} = 0 \Rightarrow 200 - B^2 = 0 \Rightarrow B^2 = 200 \Rightarrow B = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dB^2} = \frac{-2B\sqrt{400 - B^2} - \dfrac{-2B}{2\sqrt{400 - B^2}}\left(200 - B^2\right)}{400 - B^2} = \frac{-2B\left(400 - B^2\right) + B\left(200 - B^2\right)}{\left(400 - B^2\right)\sqrt{400 - B^2}}$$

$$A'' = \frac{-800B + 2B^3 + 200B - B^3}{\left(400 - B^2\right)\sqrt{400 - B^2}} = \frac{B^3 - 600B}{\left(400 - B^2\right)\sqrt{400 - B^2}} \Rightarrow$$

$$A''\left(10\sqrt{2}\right) = \frac{\left(10\sqrt{2}\right)^3 - 600\left(10\sqrt{2}\right)}{\left[400 - \left(10\sqrt{2}\right)^2\right]\sqrt{400 - \left(10\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2000\sqrt{2} - 6000\sqrt{2}}{(400 - 200)\sqrt{400 - 200}} = \frac{-4000\sqrt{2}}{2000\sqrt{2}} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\begin{cases} B = 10\sqrt{2}\ m. \\ H = \dfrac{\sqrt{400 - \left(10\sqrt{2}\right)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{400 - 200}}{2} = \dfrac{\sqrt{200}}{2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ m. \end{cases}$$

B. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que se verifica $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justifica que A tiene inversa.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Comprobado}$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

b) La condición necesaria para que una matriz tenga inversa su determinante no debe de ser nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 + 12 - 16 - 12 = -1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ \exists A^{-1}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la siguiente integral: $\int_e^{e^3} \frac{Lx}{x}\, dx$ (*L = Logaritmo neperiano*)

$$\int_e^{e^3} \frac{Lx}{x}\, dx = \int_1^3 t\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left[t^2\right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(3^2 - 1^2\right) = \frac{8}{2} = 4$$

$$Lx = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow \begin{cases} x = e^3 \Rightarrow t = L\, e^3 = 3 \cdot L\, e = 3 \cdot 1 = 3 \\ x = e \Rightarrow t = L\, e = 1 \end{cases}$$

B. Estudia, según los valores de *a*, la compatibilidad del sistema: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = -2 \end{cases}$

Resuélvelo para el valor de *a* que lo haga compatible indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow Por\ Ruffini$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & |\underline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & |\underline{0} \end{array} \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-2\ , 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = 0 \\ 0z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ última\ ecuación$$

$es\ combinación\ lineal\ de\ las\ otras\ dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$-3y + 3z = 3 \Rightarrow -y + z = 1 \Rightarrow y = -1 + z \Rightarrow -2x - 1 + z + z = 1 \Rightarrow 2x = -2 + 2z \Rightarrow x = -1 + z \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ , y\ , z) = (-1 + \lambda\ , -1 + \lambda\ , \lambda)$$

TERCER BLOQUE

A. Dada la función $f: R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$:

a) Halla las coordenadas del punto de inflexión.

b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas.

c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto de inflexión y en el origen de coordenadas.

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow$$

$$\text{Punto de inf lexión} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto inf lex.}$$

$$\text{Punto de inf lexión} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 8 - 24 + 10 = -6$$

b)

$$\text{Cuando } y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 5x = 0 \Rightarrow (x^2 - 6x + 5)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ x = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{Puntos} \Rightarrow \begin{cases} (0\,,0) \\ (1\,,0) \\ (5\,,0) \end{cases}$$

c)

En el Punto de inf lexión

$$\text{En } (2\,,-6) \Rightarrow f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 5 = 12 - 24 + 5 = -7 \Rightarrow y - (-6) = -7 \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 6 = -7x + 14 \Rightarrow$$

$$y = -7x + 8 \Rightarrow 7x + y - 8 = 0$$

En el origen

$$\text{En } (0\,,0) \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 5 = 5 \Rightarrow y - 0 = 5 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 5x \Rightarrow 5x - y = 0$$

B. Sea π el plano de ecuación $3x - 2y - 6z = 1$ y r la recta dada por $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, -1, 1)$.

a) Define la relación de paralelismo entre una recta y un plano.

b) Averigua si la recta r y el plano π son paralelos.

c) Define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.

d) Averigua si la recta r y el plano π son perpendiculares.

a) Son paralelos si sus vectores directores son perpendiculares y por ello su producto escalar nulo y si no tienen ningún punto común (para comprobarlo tomaremos un punto cualquiera de ella), de tenerlo la recta estará contenida en el plano

b) Tomaremos el punto **R** indicado en la ecuación de la recta

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,-2\,,-6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (2\,,-1\,,1) \cdot (3\,,-2\,,-6) = 6 + 2 - 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{No son paralelos}$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

c) Son perpendiculares si sus vectores directores son paralelos y por ello o son iguales o proporcionales

d)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (3\,,-2\,,-6) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-2} \Rightarrow No\ son\ perpendiculares$$

CUARTO BLOQUE

A. Sea la función f : R $\longrightarrow$ R dada por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si \quad x \leq 3 \\ 2x - 4 & si \quad x > 3 \end{cases}$.

a) Define continuidad de una función en un punto.
b) ¿En qué puntos es continua la función $f(x)$?
c) ¿En qué puntos es derivable la función $f(x)$?
d) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?

a) Una función es continua en el punto **$x = x_0$** si se verifican las siguientes condiciones:
- Existe **$f(x_0)$** es decir la función esta definida en **$x = x_0$**
- Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden, esto es, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

b)

Puede haber una discontinuidad en $x = 3$*,analicemoslo*

$$\begin{cases} f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$$

La función es continua en toda $x \in \Re - \{3\}$

c) Se puede decir ya que la función es derivable en toda $x \in \Re - \{3\}$ y la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & si \quad x < 3 \\ 2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

d) El teorema de las funciones derivables dice que una función es derivable en un punto siempre que sea continua en dicho punto, por lo tanto la respuesta es negativa

B. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$; $\pi' \equiv x - y = 0$:

a) Calcula el ángulo que forman π y π'.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y es perpendicular al plano π.

a) El ángulo formado por los planos es el mismo que forman sus vectores directores es decir el coseno de ese ángulo es igual a su producto escalar partido por el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (1\,,-1\,,0) \end{cases} \Rightarrow \cos(\pi\,,\pi') = \frac{\left|\overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{\pi'}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{\pi'}}\right|} = \frac{\left|(1\,,1\,,1) - (1\,,-1\,,0)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{|1-1+0|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0$$

$$ang\,(\pi\,,\pi') = arc\cos 0 = 90^o = \frac{\pi}{2}\,rad$$

b) La recta **r** tiene como vector director el del plano π ya que este es perpendicular al vector.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,1\,,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$