PRIMER BLOQUE

A. Una compañía de venta a domicilio ha determinado que sus beneficios anuales dependen del número de vendedores verificando la expresión: $B(x) = -9x^2 + 360x + 1875$, donde $B(x)$ es el beneficio en miles de euros para x vendedores.

a) ¿Qué número de vendedores ha de tener la empresa para que sus beneficios sean máximos?

b) ¿Cuál será el valor máximo de los beneficios?

a)

$$B'(x) = -18x + 360 \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow -18x + 360 = 0 \Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = \frac{360}{18} = 20$$

$$B''(x) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow x = 20 \text{ vendedores}$$

b)

$$B(20) = -9 \cdot 20^2 + 360 \cdot 20 + 1875 = -3600 + 7200 + 1875 = 5475 \text{ miles de euros}$$

b) ¿Cuál será el valor máximo de los ...

B. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y el sistema lineal en forma matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro λ no tiene inversa la matriz A.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + 3\lambda - 4 + 2\lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda - 4 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \lambda = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-2\ , 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

$$\text{Sistema homogeneo} \Rightarrow \text{Como } |A| = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y + z = 0 \Rightarrow y = z \Rightarrow$$

$$x + 2z + 3z = 0 \Rightarrow x = -5z \Rightarrow \text{Solución } (x\ , y\ , z) = (-5\lambda\ , \lambda\ , \lambda)$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Dada la función $f(x)$ de ecuación $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$:

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Halla los puntos máximos, mínimos y de inflexión de $f(x)$.

c) Representa su gráfica.

a)

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\cdot\left(x^2 - 3x + 2\right) = 6\cdot(x-1)\cdot(x-2) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6 > 0 \\ x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

$-\infty$	1	2	∞
6 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re / (x < 1) \cup (x > 2)$

Decrecimiento $\forall x \in \Re / 1 < x < 2$

b)

Máximo relativo en **x = 1** $f(1) = 2\cdot 1^3 - 9\cdot 1^2 + 12\cdot 1 + 3 = 2 - 9 + 12 + 3 = 8 \Rightarrow$ De Crecimiento pasa a Decrecimiento

Mínimo relativo en **x = 2** $f(2) = 2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + 3 = 16 - 36 + 24 + 3 = 7 \Rightarrow$ De Decrecimiento pasa a Crecimiento

$$f''(x) = 12x - 18 = 6\cdot(2x-3) \; f''(x) = 0 \Rightarrow 6\cdot(2x-3) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

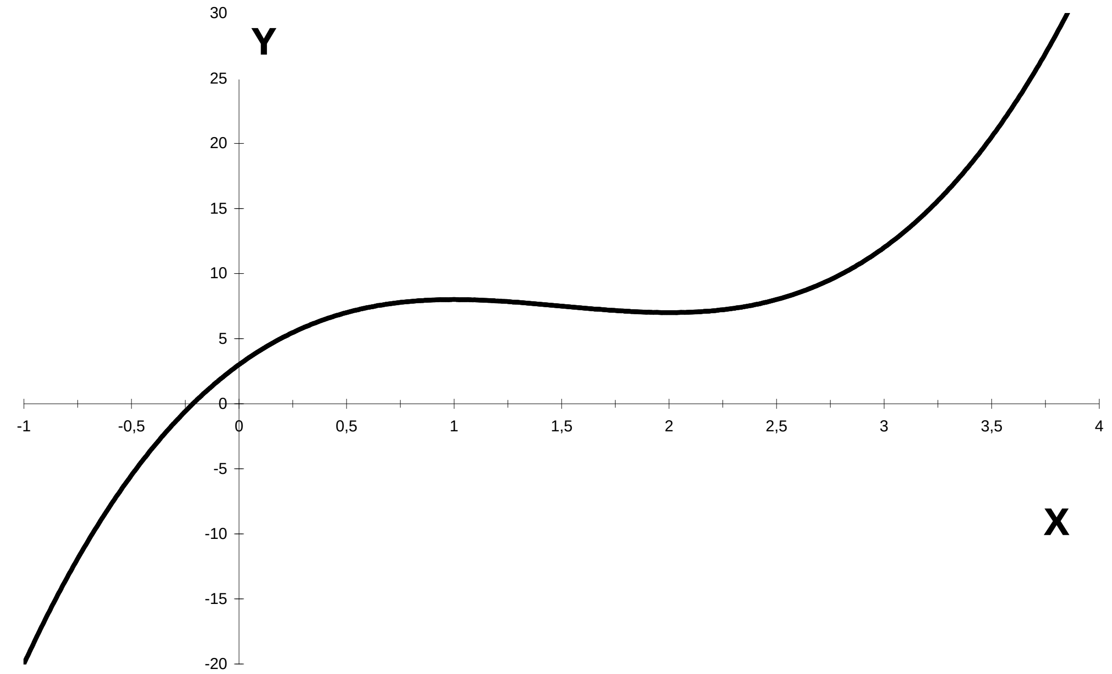
$$f'''(x) = 12 \neq 0$$

$$Punto\ de\ inflexión \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + 18 + 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 21 - \frac{54}{4} = 21 - \frac{27}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow Punto\ de\ inflexión \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

Continuación del Problema A del Segundo Bloque

c)



B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & k & 2 \\ 12 & 4 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula los valores de k para los que A no tiene inversa.
b) Determina, paso a paso, la inversa de la matriz A para el valor de $k = 3$.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & k & 2 \\ 12 & 4 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 + 3k^2 + 24 - 24 - 6k - 12k = 3k^2 - 18k + 24 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 3\left(k^2 - 6k + 8\right) = 0$$

$$k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \geq 0 \Rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{6+2}{2} = 4 \\ k = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\forall k \in \Re - \{2, 4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b)

$$Con\ k = 3 \Rightarrow |A| = 3\cdot 3^2 - 18\cdot 3 + 24 = 27 - 54 + 24 = -3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-3)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

TERCER BLOQUE

A. Determina los números reales a y b para que la función f: R $\longrightarrow$ R definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^{\frac{sen^2 x}{x}} + b\cos x & si \quad x < 0 \\ 6 & si \quad x = 0 \\ 3a\,\frac{senx}{x} + b(x-1) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua en toda la recta real.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x} = \frac{sen^2 0}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0}\frac{2sen\ x\cdot\cos x}{1} = 2sen\ 0\cdot\cos 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = \frac{sen\ 0}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = a\cdot e^{\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x}} + b\cdot\cos 0 = a\cdot e^0 + b\cdot 1 = a\cdot 1 + b = a + b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 3a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} + b\cdot(\ 0 - 1) = 3a\cdot 1 - b = 3a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow 3 + b = 6 \Rightarrow b = 3$$

B. Considera el plano π y la recta r dados por sus ecuaciones .

$$\pi \equiv a\,x + 2y - 4z + b = 0, \quad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}.$$

a) Calcula los valores de a y b para que r esté contenida en π.

b) ¿Existen valores de a y b para los que la recta dada r sea perpendicular a π?.

a) Se cumplirán dos condiciones, primera que el producto escalar de los vectores directores, que son entre si perpendiculares, es nulo y segunda que un punto **R** cualquiera de la recta **r** pertenezca al plano (tomaremos el indicado en la ecuación de ella)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,2\ ,-4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (4\ ,-4\ ,1)\cdot(a\ ,2\ ,-4) = 0 \Rightarrow 4a - 8 - 4 = 0$$

$$4a - 12 = 0 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{4} = 3$$

$$R(3\ ,1\ ,-3) \Rightarrow a \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + b = 0 \Rightarrow 3a + 2 + 12 + b = 0 \Rightarrow b = -14 - 3 \cdot 3 = -23$$

b) Para que sean perpendiculares sus vectores directores, son paralelos, son iguales o proporcionales, si no se cumple no lo son.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4\ ,-4\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,2\ ,-4) \end{cases} \Rightarrow \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{-4} \Rightarrow No\ pueden\ ser\ perpendiculares\ sean\ cuales\ sean\ los$$
$$valores\ de\ a\ y\ b$$

CUARTO BLOQUE

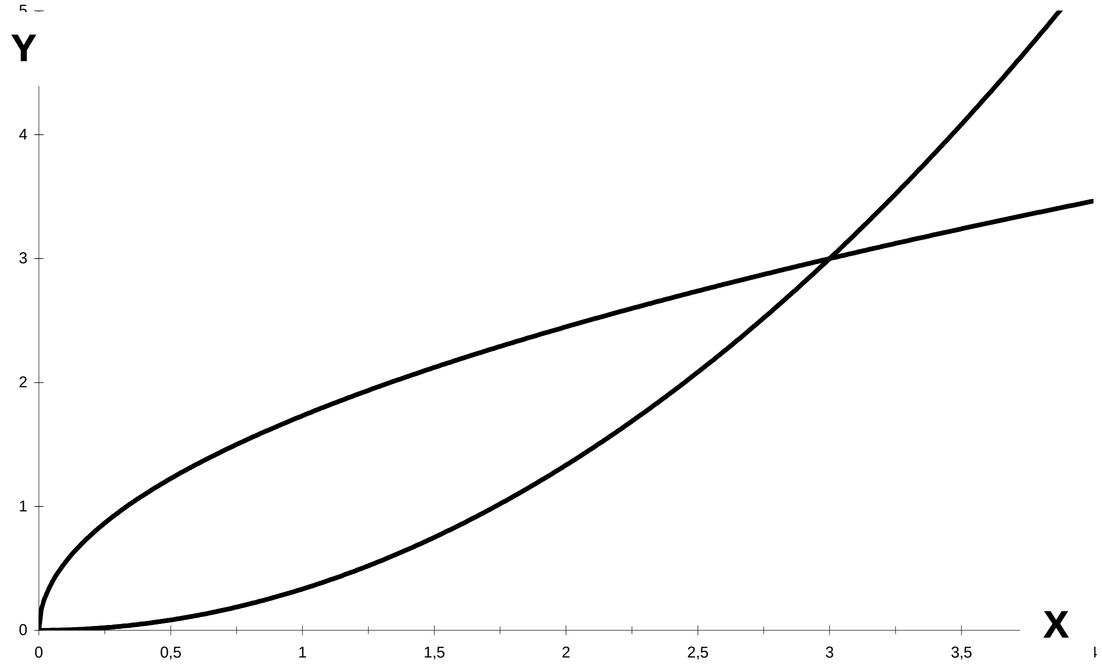
A. Dadas las curvas de ecuaciones $y=\sqrt{3x}$; $y=\frac{1}{3}x^2$:

a) Dibuja sus gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área de dicho recinto.

a) y b)



c)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \sqrt{3x}=\frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3x=\frac{1}{9}x^4 \Rightarrow 27x=x^4 \Rightarrow x^4-27x=0$$

$$\left(x^3-27\right)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^3-27=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{27}=3 \end{cases}$$

$$A=\int_0^3 \sqrt{3x}\,dx-\int_0^3 \frac{x^2}{3}\,dx=\sqrt{3}\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^3=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3-\frac{1}{9}\cdot\left(3^3-0^3\right)$$

$$A=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(3^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)_0^3-\frac{27}{9}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}-\frac{27}{9}=\frac{18}{3}-3=3\,u^2$$

c) Calcula el área de dicho recinto.

B. Dados los planos de ecuaciones $\pi \equiv x+2y-z+4=0$; $\pi' \equiv 2x+y+Cz-3=0$:

¿Para qué valores de C el ángulo formado por π y π' es de 60º?

Forman el mismo ángulo que sus vectores directores. El coseno del ángulo que forman es igual al producto escalar de esos vectores partido entre el producto de sus módulos

$$cos\ \alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{\pi'}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{\pi'}}\right|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,2\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (2\ ,1\ ,C) \end{cases} \Rightarrow cos\ 60º = \frac{\left|(1\ ,2\ ,-1)\cdot(2\ ,1\ ,C)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+C^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \pm\frac{2+2-C}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5+C^2}} \Rightarrow \sqrt{6}\cdot\sqrt{5+C^2} = 2\cdot(4-C) \Rightarrow 6\cdot\left(5+C^2\right) = 4\cdot(4-C)^2 \Rightarrow$$

$$3\cdot\left(5+C^2\right) = 2\cdot\left(16-8C+C^2\right) \Rightarrow 15+3\,C^2 = 32-16C+2C^2 \Rightarrow C^2+16C-17=0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 16^2 - 4\cdot1\cdot(-17) = 256+68 = 324 \geq 0 \Rightarrow C = \frac{-16\pm\sqrt{324}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{-16+18}{2} = 1 \\ C = \dfrac{-16-18}{2} = -17 \end{cases}$$