PRIMER BLOQUE

A. Considera la función siguiente $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$.

a) Determina los valores de ***a*** y ***b*** para que sea derivable en todos los puntos.
b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de *a* y *b* calculados.

a) Si es derivable, inicialmente debe de ser continua

$$\begin{cases} f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=1^3-1^2=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=a\cdot 1+b=a+b \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow a+b=0$$

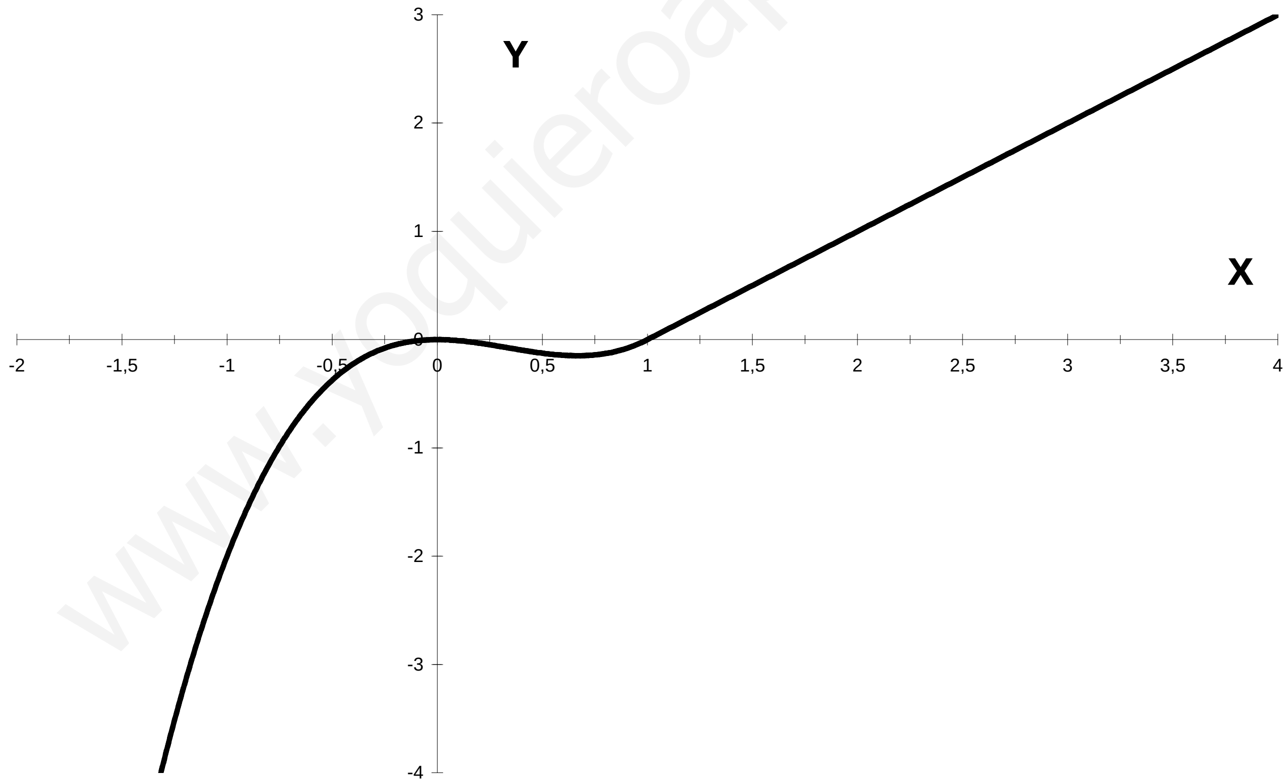
Ahora veremos cuando es derivable

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x & si \quad x<1 \\ a & si \quad x>1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f'(x)=3\cdot 1^2-2\cdot 1=1 \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)=a \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)\Rightarrow a=1\Rightarrow$$

$$1+b=0\Rightarrow b=-1$$

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

b)



B. Considera la función $f(x) = -x^4 + 4x^3$. Calcula:

a) Puntos de corte con los ejes.
b) Máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión.
d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje X.

a)

$$Corte\ con\ el \begin{cases} eje\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -x^4 + 4x^3 \Rightarrow (-x+4)x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0\ ,0) \\ -x+4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4\ ,0) \end{cases} \\ eje\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^4 + 4 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow (0\ ,0) \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$f''(x) = -12x^2 + 24x \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -12 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 = 0 \Rightarrow Sin\ definición \Rightarrow Posible\ punto\ de\ inf\ lexión \\ f''(3) = -12 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 = -108 + 72 = -36 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo \end{cases}$$

c)

$$f'''(x) = -24x + 24 \Rightarrow f'''(0) = -24 \cdot 0 + 24 = 24 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión \Rightarrow (0\ ,0)$$

d)

$$f(1) = -1^4 + 4 \cdot 1^3 = -1 + 4 = 3 \Rightarrow Positivo$$

$$A = \int_0^4 \left(-x^4 + 4x^3\right) dx = -\frac{1}{5} \cdot \left[x^5\right]_0^4 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_0^4 = -\frac{1}{5} \cdot \left(4^5 - 0^5\right) + \left(4^4 - 0^4\right) = -\frac{1024}{5} + 256 = \frac{1280 - 1024}{5}$$

$$A = \frac{256}{5}\ u^2$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero.
Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

Sean los números **a**, **2a** y **b**

$$\begin{cases} 60 = a + 2a + b \Rightarrow 60 = 3a + b \Rightarrow b = 60 - 3a \\ P = a \cdot 2a \cdot b = 2a^2 b \end{cases} \Rightarrow P = 2a^2(60 - 3a) = 6a^2(20 - a) = 6\left(20a^2 - a^3\right) \Rightarrow$$

$$P' = 6\left(40a - 3a^2\right) = 6a\,(40 - 3a) \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 6a\,(40 - 3a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 40 - 3a = 0 \Rightarrow 3a = 40 \Rightarrow a = \dfrac{40}{3} \Rightarrow \end{cases}$$

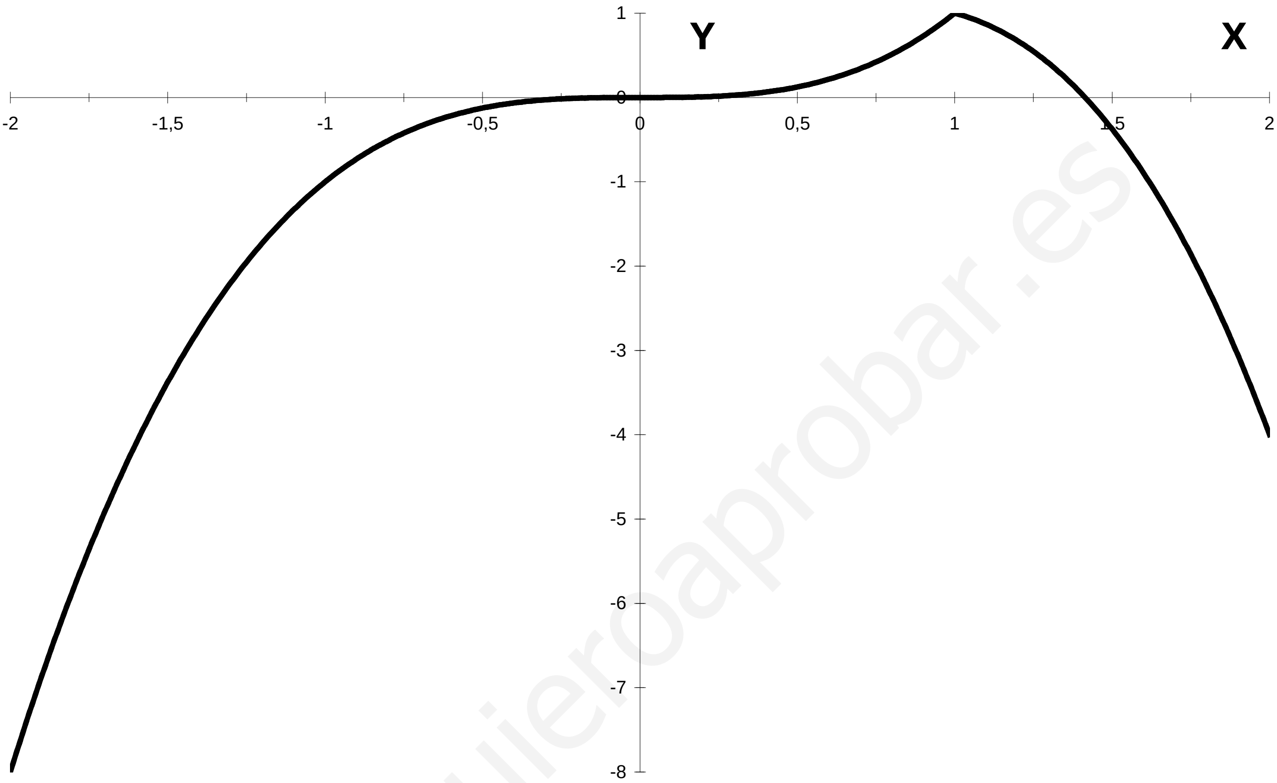
$$P'' = 6\,(40 - 6a) = 12\,(20 - 3a) \Rightarrow \begin{cases} P''(0) = 12\,(20 - 3 \cdot 0) = 12 \cdot 20 = 240 > 0 \Rightarrow Mínimo \\ P''\left(\dfrac{40}{3}\right) = 12\left(20 - 3 \cdot \dfrac{40}{3}\right) = 12 \cdot (20 - 40) = -240 < 0 \Rightarrow Máximo \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{40}{3} \\ 2a = \dfrac{80}{3} \\ b = 60 - 3 \cdot \dfrac{40}{3} = 60 - 40 = 20 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{40}{3} \cdot \frac{80}{3} \cdot 20 = \frac{64000}{9}$$

B. Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x<1 \\ -x^2+2x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Haz un dibujo aproximado de su gráfica.
b) Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

a)



b)

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x<1 \\ -x^2+2x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$$Corte\ de\ las\ \ funciones\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3=0 \Rightarrow x=0 \in (-\infty\ ,1) \\ -x^2+2x=0 \Rightarrow (-x+2)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \notin (1\ ,\infty) \\ x=2 \in (1\ ,\infty) \end{cases} \end{cases}$$

$$Punto\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow x^3=-x^2+2x \Rightarrow x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow (x^2+x-2)x=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9>0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \Rightarrow No\ es\ solución \end{cases} \end{cases}$$

$$A=\int_0^1 x^3\ dx+\int_1^2 (-x^2+2x)=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2=\frac{1}{4}\cdot(1^4-0^4)-\frac{1}{3}\cdot(2^3-1^3)+(2^2-1^2)$$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{7}{3}+3=\frac{3-28+36}{12}=\frac{11}{12}\ u^2$$

TERCER BLOQUE

A. Sean A y B las matrices siguientes $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ Ambas son de rango 3.

¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro λ.

$$A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\lambda&\lambda\\\lambda&\lambda&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\\lambda&2+\lambda&0\\1&1&2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\0&2+\lambda-\lambda^2&-1-\lambda\\0&1-\lambda&2-1-\lambda\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&\lambda&1+\lambda\\0&2+\lambda-\lambda^2&-1-\lambda\\0&1-\lambda&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda=0\\1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1\\2+\lambda-\lambda^2=0\Rightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9\geq0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{1+3}{2}=2\\\lambda=\dfrac{1-3}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow\\-1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1\\1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=1\end{cases}$$

$$Para\ \lambda=0\Rightarrow A+\lambda B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&0&-3\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=3$$

$$Para\ \lambda=-1\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=2$$

$$Para\ \lambda=1\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=2$$

$$Para\ \lambda=2\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1+\lambda\\0&0&-3\\0&-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=3$$

$$(Para\ todo)\forall\lambda\in\Re-\{-1\ ,1\}\Rightarrow|A+\lambda B|\neq0\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=3$$

$$Cuando\ \lambda=-1\Rightarrow|A+\lambda B|=0\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=2$$

$$Cuando\ \lambda=1\Rightarrow|A+\lambda B|=0\Rightarrow rang\ (A+\lambda B)=2$$

B. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$:

a) Halla la matriz inversa de **(A - I),** siendo **I** la matriz unidad de orden 3.
b) Halla la matriz **X** solución de la ecuación **X.A - 2B = X**.

a) La condición necesaria para que exista matriz inversa es que su determinante no sea nulo

$$A-I=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow |A-I|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0\Rightarrow (Existe)\exists (A-I)^{-1}\Rightarrow$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{|A-I|}\cdot\left[adj\ (A-I)^t\right]\Rightarrow (A-I)^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (A-I)^t=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$b)$

$$XA-2B=X\Rightarrow XA-X-2B=0\Rightarrow XA-X=2B\Rightarrow (A-1)X=2B\Rightarrow (A-1)^{-1}(A-1)X=(A-1)^{-1}2B\Rightarrow$$
$$IX=2\,(A-1)^{-1}B\Rightarrow X=2\,(A-1)^{-1}B$$

$$Como\ (A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow X=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

CUARTO BLOQUE

A. Halla la distancia del plano $\pi_1\equiv 4x-10y+2z=-1$ al plano $\pi_2\equiv\begin{cases}x=2\lambda+3\mu\\ y=\lambda+\mu\\ z=\lambda-\mu\end{cases}$

Para que se pueda hallar su distancia los planos tienen que ser paralelos y sus vectores directores iguales o proporcionales

$$\pi_2\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+3y+2z-3z-x+2y=0\Rightarrow \pi_2\equiv 2x-5y+z=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_{\pi_1}}=(4\ ,-10\ ,2)\\ \overrightarrow{v_{\pi_1}}=(2\ ,-5\ ,1)\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{2}=\frac{-10}{-5}=\frac{2}{1}\Rightarrow\overrightarrow{v_{\pi_1}}\parallel\overrightarrow{v_{\pi_1}}\Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\pi_1\equiv 4x-10y+2z+1=0\\ \pi_2\equiv 4x-10y+2z=0\end{cases}\Rightarrow d(\pi_1\ ,\pi_2)=\frac{|1-0|}{\sqrt{4^2+(-10)^2+2^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{120}}=\frac{1}{2\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{60}\ u$$

B. Considera la recta ***r*** que pasa por los puntos **A(2 , 1, 0)** y **B(-4 , -2, 0)** y la recta ***s*** determinada por el punto **C(2 , 3 , 5)** y el vector dirección ***v*(1 , 3 , 0).**

a) Calcula el ángulo formado por ***r*** y ***s*.**
b) Calcula la distancia de ***r*** a ***s***.

a)
Las rectas deben de cortarse en un punto para formar un ángulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-4\,,-2\,,0)-(2\,,1\,,0)=(-6\,,-3\,,0)\equiv(2\,,1\,,0) \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=2+2\mu \\ y=1+\mu \\ z=0 \end{cases} \\ \qquad\qquad s\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3+3\lambda \\ z=5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 0\neq 5 \Rightarrow \textit{No se cor}\text{ tan}$$

$\frac{1}{3}\neq\frac{3}{1}\Rightarrow$ *No son paralelos ni coincidentes* $\Rightarrow$ *Son rectas que se cruzan* $\Rightarrow$ *No se puede hallar el ángulo*

Si podemos hallar el ángulo que forman su vectores directores (el de **s** se conoce y el de **r** es el vector **AB**), y este se halla como el cociente entre el producto escalar de ellos y el producto de sus módulos que nos da el coseno del ángulo que forman.

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-4\,,-2\,,0)-(2\,,1\,,0)=(-6\,,-3\,,0)\equiv(2\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,3\,,0) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{\left|(2\,,1\,,0)\cdot(1\,,3\,,0)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+0^2}}=\frac{|2+3+0|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{|5|}{\sqrt{50}}=\frac{5\sqrt{50}}{50}\Rightarrow$$

$$\alpha=arc\cos\left(\frac{5\sqrt{50}}{50}\right)=45^{o}$$

b) Para hallar la distancia de **r** a **s**, trazaremos un plano π que contendrá a la recta **s** y es paralelo a la recta **r**, para ello contamos con los vectores directores de las dos rectas y el vector que forman un punto **C** cualquiera de la recta **s** (tomaremos el indicado en su ecuación) y el punto **G**, generador del plano, estos tres vectores son coplanarios (se encuentran en el mismo plano) y el último vector es combinación lineal de las otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano que se quiere hallar.
Una vez obtenido el plano, hallaremos la distancia de un punto cualquiera de **r** (tomamos **A**) a él, esta es la distancia entre las rectas pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,1\,,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,3\,,0) \\ \overrightarrow{CG}=(x\,,y\,,z)-(2\,,3\,,5)=(x-2\,,y-3\,,z-5) \end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow(z-5)(6-1)=0\Rightarrow$$

$$5\,(z-5)=0\Rightarrow\pi\equiv z-5=0$$

$$d(r\,,s)=d(r\,,s)=\frac{|0-5|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{5}{1}=5\,u$$