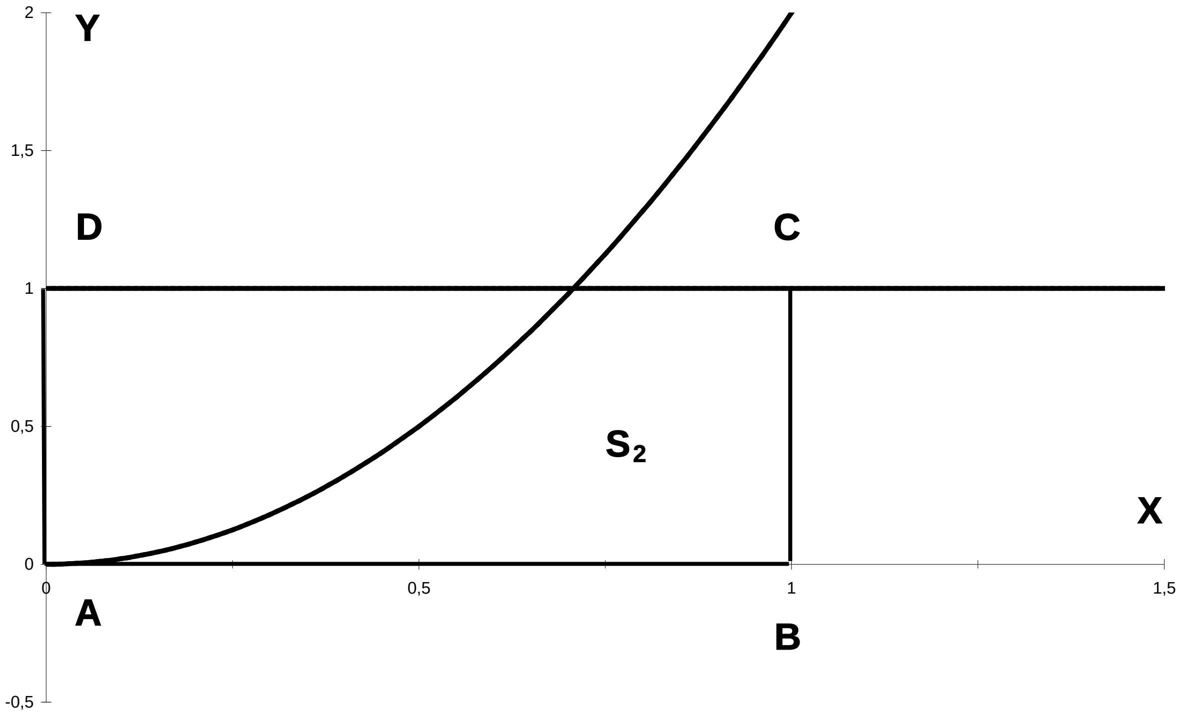
PRIMER BLOQUE

A. La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices A(0,0), B(1,0), C(1,1) y D(0,1) en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.

b) Halla el área de cada uno de ellos.

a)



b)

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{No solución} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Area total} = S = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow S = S_1 + S_2$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x^2 dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 1\, dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 0^3\right] + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}}{6} = \frac{6-2\sqrt{2}}{6} = \frac{3-\sqrt{2}}{3}\, u^2$$

$$S_1 = S - S_2 = 1 - \frac{3-\sqrt{2}}{3} = \frac{3-3+\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\, u^2$$

B. Un alambre de 100 metros de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Halla la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

Llamando **L** al lado del cuadrado y **R** al radio de la circunferencia

$$\begin{cases} 4L+2\pi R=100 \Rightarrow 4L=-2\pi R+100 \Rightarrow L=25-\dfrac{\pi R}{2} \\ A=L^2+\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow A=\left(25-\frac{\pi R}{2}\right)^2+\pi R^2 \Rightarrow$$

$$A'=\frac{dA}{dR}=2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(25-\frac{\pi R}{2}\right)+2\pi R=-25\pi+\frac{\pi^2 R}{2}+2\pi R=\frac{-50\pi+\pi^2R+4\pi R}{2}=\pi\frac{-50+(\pi+4)R}{2}$$

$$A'=0\Rightarrow \pi\frac{-50+(\pi+4)R}{2}=0\Rightarrow -50+(\pi+4)R=0\Rightarrow R=\frac{50}{\pi+4}\Rightarrow$$

$$A''=\frac{d^2A}{dR^2}=\frac{\pi}{2}\cdot(\pi+4)>0\Rightarrow Mínimo\Rightarrow$$

$$\begin{cases} R=\dfrac{50}{\pi+4}\ m \\ L=25-\dfrac{\pi\frac{50}{\pi+4}}{2}=25-\dfrac{50\pi}{2(\pi+4)}=25-\dfrac{25\pi}{\pi+4}=25\left(1-\dfrac{\pi}{\pi+4}\right)=25\left(\dfrac{\pi+4-\pi}{\pi+4}\right)=\dfrac{100}{\pi+4}\ m \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Dada la curva $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ se pide:

a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos, si los hay.
e) Una representación aproximada de la misma.

a)

$$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow Solución\ imaginaria\Rightarrow No\ hay\ solución\Rightarrow$$
$$Dom\,(f)=\forall x\in\Re$$

$$Puntos\ de\ corte\Rightarrow\begin{cases} Con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases} \\ Con\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow \dfrac{0^2-1}{0^2+1}=\dfrac{-1}{1}=-1 \end{cases}$$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$
$$(Existe)\exists\ asíntota\ horizontal\ y=1\ cuando\ x\to\infty$$

Continuación Problema A del Segundo Bloque

a)Continuación

Asíntotas horizontales (Continuación)

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(-x)^2 - 1}{-(x)^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \exists\ asíntota\ horizontal\ \ y = 1\ cuando\ x \to -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6x} =$$

$$= \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow (No\ existe) \nexists\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x \to \infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3 + (-x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{-x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{-3x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{-6x} = \frac{2}{-\infty} = 0 \Rightarrow (No\ existe) \nexists\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x \to -\infty$$

c)

$$y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow Creciente \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

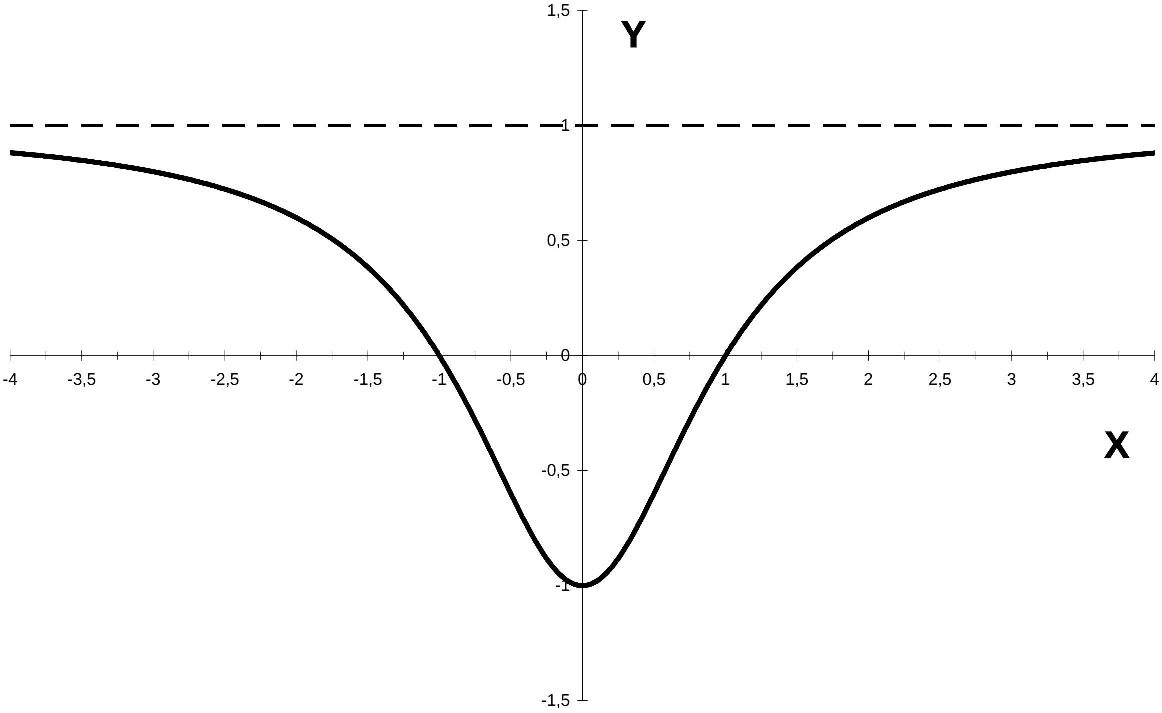
	$-\infty$	**0** ∞
4 > 0	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 + 1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re / x > 0$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / x < 0$

d)

Máximo relativo en x = 0 f(0) = -1 (ya hallado en a)**) De crecimiento pasa a decrecimiento**

Continuación Problema A del Segundo Bloque
d)



B. Determina ***b*** y ***c*** para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \le 2 \\ -x^2 + bx + c & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Sea derivable en todos los puntos de R.(R = números Reales)
b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.
c)

a) Para que sea derivable inicialmente tiene que ser continua

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2^3 = 8 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2^2 + b\cdot 2 + c = 2b + c - 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2b + c - 4 = 8 \Rightarrow 2b + c = 12$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad x < 2 \\ -2x + b & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3\cdot 2^2 = 12 \\ \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -2\cdot 2 + b = b - 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow b - 4 = 12 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2b + c = 12 \\ b = 16 \end{cases} \Rightarrow 2\cdot 16 + c = 12 \Rightarrow c = 12 - 32 = -20$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \le 2 \\ -x^2 + 12x - 20 & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad x \le 2 \\ -2x + 12 & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$En\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1^3 = 1 \\ f(1) = 3\cdot 1^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow Ecuación\ tan\,gente \Rightarrow y - 1 = 3\cdot(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 1 \Rightarrow y = 3x - 2$$

TERCER BLOQUE

A. a) Determina la matriz **X** para que tenga solución la ecuación **C(A+X) B = I** donde **A**, **B** y **C** son matrices con inversa de orden n e I es la matriz identidad de orden n.

b) Aplica el resultado anterior para $A=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.$

a)

$$C^{-1}C\left(A+X\right)B=C^{-1}I\Rightarrow I\left(A+X\right)B=C^{-1}\Rightarrow\left(A+X\right)BB^{-1}=C^{-1}B^{-1}\Rightarrow\left(A+X\right)I=C^{-1}B^{-1}\Rightarrow$$

$$A+X=C^{-1}B^{-1}\Rightarrow X=C^{-1}B^{-1}-A$$

b)

$$\begin{cases}|B|=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq0\Rightarrow\exists B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\cdot\left(adj\ B^t\right)\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ B^t=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\\|C|=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1\neq0\Rightarrow\exists C^{-1}\Rightarrow C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\cdot\left(adj\ C^t\right)\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ C^t=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\-2&0\end{pmatrix}$$

B. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}(m+2)x+(m-1)y-z&=&3\\mx-y+z&=&2\\x+my-z&=&0\end{cases}$

a) Discútelo para los distintos valores de ***m***

b) Resuélvelo para ***m* = 1.**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}m+2&m-1&-1\\m&-1&1\\1&m&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2m+2&m-2&0\\m&-1&1\\m+1&m-1&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2\left(m+1\right)&m-2\\m+1&m-1\end{vmatrix}=2\left(m+1\right)\left(m-1\right)-\left(m+1\right)\left(m-2\right)$$

$$|A|=\left(m+1\right)\left[2\left(m-1\right)+\left(m-2\right)\right]=\left(m+1\right)\left(2m-2-m+2\right)=m\left(m+1\right)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow m\left(m+1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\m=0\end{cases}$$

$$\forall x\in\Re-\{-1\,,\,0\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ \left(A\right)=3=\text{Número de incognitas}\Rightarrow\text{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ m=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&3\\-1&-1&1&2\\1&-1&-1&0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&3\\0&-3&0&5\\0&1&0&-3\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&3\\0&0&0&-4\\0&1&0&-3\end{array}\right)\Rightarrow rang\ \left(A\right)=2\neq rang\ \left(A/B\right)=2\Rightarrow$$

Sistema Incompatible

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

$Si\ m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 2 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$b)$

$Si\ m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y - 0 = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$x - 1 - 0 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1\ ,-1\ ,\ 0)$$

CUARTO BLOQUE

A. Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - y + 2z = 1$. Se pide:

a) Comprueba que ***r*** y π son paralelos.
b) Calcula la distancia entre r y π
c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a ***r*.**

a) Si son paralelos o la recta r esta contenida en π su vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo**,** entonces tendremos que analizar que un punto R, cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) no pertenece al plano porque de pertenecer la recta y el plano son coincidentes si no pertenece es son paralelos y, por fin, si el producto escalar no es nulo el plano y la recta se cortarán

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 5 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-2\ ,-4\ ,1) \equiv (2\ ,4\ ,-1) \\ R(3\ ,5\ ,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\ ,4\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (3\ ,-1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,4\ ,-1) \cdot (3\ ,-1\ ,2) = 6 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow Son\ paralelos\ o\ concidentes \Rightarrow$$

$$3 \cdot 3 - 5 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow 9 - 5 \neq 1 \Rightarrow 4 \neq 1 \Rightarrow R\ no\ es\ punto\ del\ plano\ \pi \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ paralelos$$

b) Es la distancia desde un punto cualquiera de la recta (tomaremos R) al plano π

$$d(r\ ,\pi) = d(R\ ,\pi) = \frac{|3 \cdot 3 - 5 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9 - 5 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|3|}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}\ u$$

c) Buscaremos dos puntos **S** y **T** del plano π y pasando por ellos hallaremos las rectas **s** y **t** que tendrán como vector director el de la recta **r**

$$\begin{cases} S(0\ ,y\ ,0) \Rightarrow 3\cdot 0 - y + 2\cdot 0 = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow S(0\ ,-1\ ,0) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 0 - 2\mu = -2\mu \\ y = -1 - 4\mu \\ z = 0 + \mu = \mu \end{cases} \\ T(-1\ ,y\ ,2) \Rightarrow 3\cdot(-1) - y + 2\cdot 2 = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow S(-1\ ,0\ ,2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 0 - 4\alpha = -4\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \end{cases}$$

B. Considera los puntos **A(2 , 0 , 0)**, **B(0 , 2 , 0)**, **C(2 , 2 , 1)** y **D(1 , 1 , 2)** y calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.
b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto **D** y es paralelo al que contiene a los puntos **A, B, C**.

a) Es un sexto del modulo del producto mixto (escalar por vectorial) de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\ ,2\ ,0) - (2\ ,0\ ,0) = (-2\ ,2\ ,0) \\ \overrightarrow{AC} = (2\ ,2\ ,1) - (2\ ,0\ ,0) = (0\ ,2\ ,1) \\ \overrightarrow{AD} = (1\ ,1\ ,2) - (2\ ,0\ ,0) = (-1\ ,1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|\right| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 2 + 2 = -8 \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot|-8| = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\,u^3$$

Nota.- Cuando se calculan volúmenes o distancias, en una palabra dimensiones, no se pueden reducir las componentes del vector como haremos en el apartado c) al no estar en el supuesto indicado

b) Para hallar el plano π_1 que pasa por **A**, **B** y **C**, tomaremos los vectores **AB** y **AC** y el vector **AG**, siendo el punto **G**, el que genera el plano buscado. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el último es combinación lineal de los otros dos, por ello el determinante de la matriz formada por los tres es nula y la ecuación del plano pedido.

Una vez conocido el plano y su vector director este es el del nuevo plano π_2 que es perpendicular al vector **DG,** siendo el punto **G** el que genera el nuevo plano, y por ello el producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$c)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2\ ,2\ ,0) \equiv (-1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,2\ ,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z) - (2\ ,0\ ,0) = (x-2\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2) - 2z + y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv x + y - 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1\ ,1\ ,-2) \\ \overrightarrow{DG} = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,1\ ,2) = (x-1\ ,y-1\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{DG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}}\cdot\overrightarrow{DG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\ ,1\ ,-2)\cdot(x-1\ ,y-1\ ,z-2) = 0 \Rightarrow x - 1 + y - 1 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y - 2z + 2 = 0$$