PRIMER BLOQUE

A. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k \in \Re$ para que la función definida por $\begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en **x = 0**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{0+1-e^0}{2\cdot 0+1+e^{2\cdot 0}} = \dfrac{0+1-1}{0+1-1} = \dfrac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1-e^x}{2-2e^{2x}} = \dfrac{1-e^0}{2-2e^{2\cdot 0}} = \dfrac{0}{0} = \Rightarrow \\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = (2\cdot 0-k)^2 = k^2 \end{cases}$$

$$= \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-e^x}{-2\cdot 2e^{2x}} = \frac{-e^0}{-4e^{2\cdot 0}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

B. Para la función $f(x) = (x+2)e^x$, se pide: a) Estudiar su dominio y continuidad. b) Determina sus puntos de corte con los ejes. c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos relativos. d) Determina las coordenadas de los puntos de inflexión.
(Recuerda que: $e^x \neq 0 \quad \forall x \in \Re$)

a)

$Dom(f) = \forall x \in \Re \Rightarrow$ *Es continua en toda la recta real*

b)

$$Corte\ con\ los\ ejes \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x+2)e^x = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = (0+2)e^0 = 2\cdot 1 = 2 \Rightarrow f(0) = 2 \end{cases}$$

c)

$$f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (x+3)e^x = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f''(x) = e^x + (x+3)e^x = (x+4)e^x \Rightarrow f''(-3) = (-3+4)e^{-3} = \frac{1}{e^3} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$Mínimo\ relativo\ en\ x = -3 \Rightarrow f(-3) = (-3+2)e^{-3} = -\frac{1}{e^3}$$

d)

$$f''(x) = (x+4)e^x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow (x+4)e^x = 0 \Rightarrow x+4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow Posible\ punto\ de\ inf\ lexión$$

$$f'''(x) = e^x + (x+4)e^x = (x+5)e^x \Rightarrow f'''(-4) = (-4+5)e^{-4} = \frac{1}{e^4} \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión$$

$$Punto\ de\ inf\ lexión \Rightarrow x = -4 \Rightarrow f(-4) = (-4+2)e^{-4} = -\frac{2}{e^4}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la siguiente integral $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} x^3+1 & x^2+4 \\ \hline -x^3-4x & x \\ \hline -4x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+1}{x^2+4} = x + \frac{1-4x}{x^2+4}$$

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{1-4x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx - 4\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx - 4\int \frac{1}{t}\frac{dt}{2}$$

$$x^2+4 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

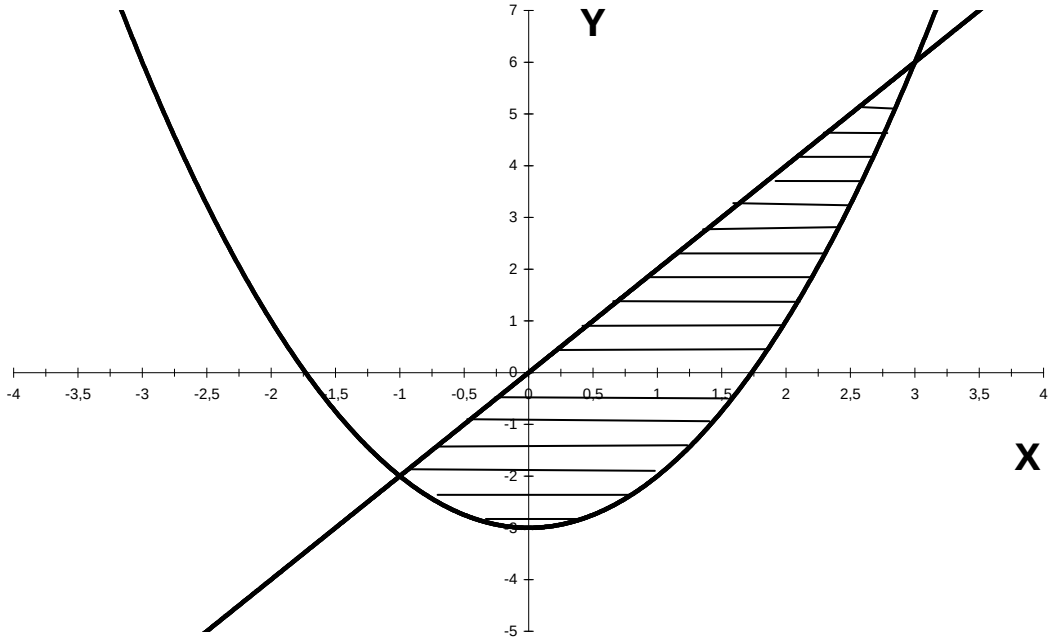
$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx - 2\int \frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2\,du - 2\ln t = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\,u - 2\ln\left(x^2+4\right)$$

$$\frac{x}{2} = u \Rightarrow dx = 2\,du$$

$$I = \int \frac{x^3+1}{x^2+4}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln\left(x^2+4\right) + K$$

B. Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = 2x$, y sombrea el área que queda encerrada en ellas. Calcula el valor de dicho área

a)



Con

b)

$$\text{Puntos de corte de cada función con OX} \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 0=2x \Rightarrow x=0 \\ 0=x^2-3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow 2x=x^2-3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16>0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^2-3)\,dx\right|-\left|\int_{-1}^{0}2x\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx\right|+\int_{0}^{\sqrt{3}}2x\,dx+\int_{\sqrt{3}}^{3}2x\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{3}(x^2-3)\,dx$$

$$A=-\int_{-1}^{0}(x^2-3)\,dx+\int_{-1}^{0}2x\,dx-\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx+\int_{0}^{3}2x\,dx-\int_{\sqrt{3}}^{3}(x^2-3)\,dx=\int_{-1}^{3}2x\,dx-\int_{-1}^{3}(x^2-3)\,dx$$

$$A=\int_{-1}^{3}(2x-x^2+3)\,dx=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{3}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{3}+3\cdot\left[x\right]_{-1}^{3}=\left[3^2-(-1)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[3^3-(-1)^3\right]+3\cdot\left[3-(-1)\right]$$

$$A=(9-1)-\frac{1}{3}\cdot\left[27-(-1)\right]+3\cdot(3+1)=8-\frac{28}{3}+12=20-\frac{28}{3}=\frac{32}{3}\,u^2$$

TERCER BLOQUE

A. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=x$, y además $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix}=50x+6$,

halla el valor de **x** (Nota: Expresa los determinantes de la segunda igualdad en función de **x**)

$$3.5\cdot\begin{vmatrix} b & 2c & 2a \\ e & 2f & 2d \\ h & 2i & 2g \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b-c & 7c \\ d & e-f & 7f \\ g & h-i & 7i \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2b & b-c & 7c \\ 2e & e-f & 7f \\ 2h & h-i & 7i \end{vmatrix}=50x+6 \Rightarrow$$

$$15\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b & 7c \\ d & e & 7f \\ g & h & 7i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c & 7c \\ d & f & 7f \\ g & i & 7i \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2b & b & 7c \\ 2e & e & 7f \\ 2h & h & 7i \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2b & c & 7c \\ 2e & f & 7f \\ 2h & i & 7i \end{vmatrix}=50x+6$$

$$60\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} a & c & c \\ d & f & f \\ g & i & i \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} b & b & 7c \\ e & e & 7f \\ h & h & 7i \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} 2b & c & c \\ 2e & f & f \\ 2h & i & i \end{vmatrix}=50x+6$$

$$(-60)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}+7\cdot 0-2\cdot 0+7\cdot 0=50x+6 \Rightarrow 60x-7x=50x+6 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$$

B. Clasifica en función del parámetro $a\in\Re$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax-3y-2z=0 \\ -x+(5+a)z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ y

resuélvelo, si es posible, para **a = - 4**

Como es una ecuación homogénea solo puede ser compatible, determinado en el caso de que el determinante de los coeficientes no sea nulo, con solución trivial para todos; e indeterminado cuando el determinante de los coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6(5+a) + 6 - 3a(5+a) - 12 = -30 - 6a - 15a - 3a^2 - 6 = -3a^2 - 21a - 36 \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -3(a^2 + 7a + 12) = 0 \Rightarrow a^2 + 7a + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0 \Rightarrow a = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{-7+1}{2} = -3 \\ a = \dfrac{-7-1}{2} = -4 \end{cases}$$

$\forall a \in \Re - \{-4, -3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = N\text{úmero de incógnitas} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\ min\ ado$

$Solución\ trivial \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$

$Cuando\ a = -4\ o\ a = -3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\ det\ er\ min\ ado$

$Si\ a = -4$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3y - 6z = 0 \Rightarrow -3y = 6z \Rightarrow$$

$$y = \frac{6}{-3}z = -2z \Rightarrow -4x - 3 \cdot (-2z) - 2z = 0 \Rightarrow -4x + 6z - 2z = 0 \Rightarrow -4x + 4z = 0 \Rightarrow 4x = 4z \Rightarrow x = z \Rightarrow$$

$Solución \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, -2\lambda, \lambda), con\ \lambda \in \Re$

CUARTO BLOQUE

A.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 6 + t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ -2y + z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Analiza su posición relativa

b) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta **s** y es paralelo a la recta **r**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 6 + t \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ -2y + z = 2 + 2y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + t = 1 \\ 5 + t = \lambda \\ 6 + t = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow t = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \lambda = 5 - 2 = 3 \Rightarrow$$

$6 + (-2) = 2 + 2 \cdot 3 \Rightarrow 4 \neq 8 \Rightarrow$

Es un sistema Incompatible por lo tanto no son ni coincidentes ni secantes

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{0} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ propocionales \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

Son rectas que se **cruzan en el espacio**.

b) Para obtener el plano π pedido tendremos contar con los vectores directores de **r** y **s** y con el vector formado por un punto **S** cualquiera de la recta **s** (tomaremos el indicado en su ecuación paramétrica) y el punto **G** genérico del plano.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **SG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$S(1, 0, 2)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0, 1, 2) \\ \overrightarrow{SG} = (x, y, z) - (1, 0, 2) = (x - 1, y, z - 2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2(x - 1) + (z - 2) - (x - 1) - 2y = 0 \Rightarrow (x - 1) - 2y + (z - 2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

B. a) Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto **P(2 , -1 , 3)** y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

b) Halla las coordenadas del punto **P',** simétrico del punto **P** respecto de la recta **r**.

a) El vector formado por el punto **P** y el punto **R** general de la recta **r** (una recta que pasando por **P** se apoya en la recta **r**) es perpendicular al vector director de dicha recta y por lo tanto su producto escalar nulo. Conocido λ calcularemos el punto **Q** de corte y el vector **PQ** es el director de la recta **s** que queremos hallar

$$R(-1+2\lambda\ ,3-\lambda\ ,0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (-1+2\lambda\ ,3-\lambda\ ,0) - (2\ ,-1\ ,3) = (-1+2\lambda-2\ ,3-\lambda+1\ ,0-3) = (-3+2\lambda\ ,4-\lambda\ ,-3) \\ \overrightarrow{v_r} = (2\ ,-1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (-3+2\lambda\ ,4-\lambda\ ,-3)\cdot(2\ ,-1\ ,0) = 0 \Rightarrow -6+4\lambda-4+\lambda = 0 \Rightarrow -10+5\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$5\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$Q\begin{cases} x = -1+2\cdot 2 \\ y = 3-2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3\ ,1\ ,0) - (2\ ,-1\ ,3) = (1\ ,2\ ,-3) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = -1+2\mu \\ z = 3-3\mu \end{cases}$$

b) El punto **Q** es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'** respecto a la recta **r**

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{2+x_{P'}}{2} \Rightarrow 2+x_{P'} = 6 \Rightarrow x_{P'} = 4 \\ 1 = \dfrac{-1+y_{P'}}{2} \Rightarrow -1+y_{P'} = 2 \Rightarrow y_{P'} = 3 \Rightarrow P'(4\ ,3\ ,-3) \\ 0 = \dfrac{3+z_{P'}}{2} \Rightarrow 3+z_{P'} = 0 \Rightarrow z_{P'} = -3 \end{cases}$$