PRIMER BLOQUE

A. Determina los valores $a,b,c \in \Re$ para que la función **f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c** pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en **x = -1**, y su recta tangente en **x = 1** tenga pendiente **3**

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow 3 + 2a + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad \Rightarrow 2 \cdot 3 + b = 0 \\ f''(-1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (-1) + 2a = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$b = -6 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$$

B. Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes **f(-2) = f(2)** pero no hay ningún valor $c \in (-2\ ,2)$ tal que f'(c) = 0. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle:

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, b) $g(x) = 2 - |x|$ (*Nota:* $|x|$ representa el valor absoluto de **x**)

Teorema de Rolle

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

$a)$

$$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0^4} = \frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical\ en\ x = 0$$

No cumple el teorema de Rolle porque la función es **discontinua** en **x = 0**$\in [-2\ ,2]$

$b)$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2 - (-x) & si \quad x < 0 \\ 2 - x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} g(x) = 2 + 0 = 2 \\ g(0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 2 - 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

Función continua en toda la recta real

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < 0 \\ -1 & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} g'(x) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} g'(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} g'(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g'(x) \Rightarrow No\ es\ derivable\ en\ x = 0$$

No cumple el teorema de Rolle porque la función es continua en **x = 0**$\in [-2\ ,2]$**,** pero **no es derivable** en **x = 0**$\in (-2\ ,2)$**,**

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$.

$$x^2-2x+1=(x-1)^2 \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{x+2}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{A+B\,(x-1)}{(x-1)^2}\Rightarrow$$

$$A+B\,(x-1)=x+2\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow A+B\,(1-1)=1+2\Rightarrow A=3 \\ x=0\Rightarrow A+B\,(0-1)=0+2\Rightarrow A-B=2\Rightarrow 3-B=2\Rightarrow b=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}$$

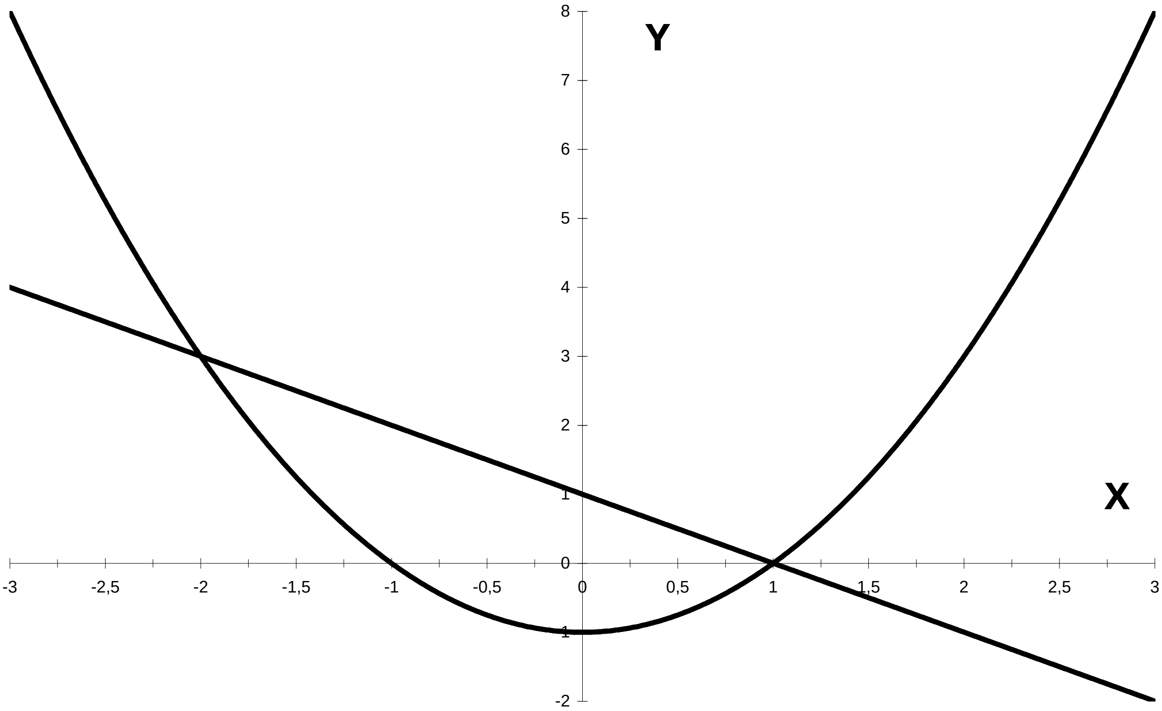
$$I=\int\frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx=\int\frac{3}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{1}{(x-1)}\,dx=3\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t}=3\int t^{-2}dt+\ln t=3\cdot\frac{1}{(-1)}t^{-1}+\ln(x-1)$$

$$x-1=t\Rightarrow dx=dt$$

$$I=\int\frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx=-\frac{3}{t}+\ln(x-1)=-\frac{3}{x-1}+\ln(x-1)+K$$

B. Dada las funciones **f(x) = x^2 – 1** y **g(x) = 1 – x** : a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas, b) Calcula el área de dicho recinto

a)



Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b)

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \\ 0 = 1 - x \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 1 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^{-1}(1-x)\,dx - \int_{-2}^{-1}(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{1}(1-x)\,dx + \left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx\right| = \int_{-2}^{-1}(2-x-x^2)\,dx + \int_{-1}^{1}(1-x)\,dx - \int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{-1}(2-x-x^2)\,dx + \int_{-1}^{1}(2-x-x^2)\,dx = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\,dx = 2\cdot[x]_{-2}^{1} - \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{1} - \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-2}^{1}$$

$$A = 2\cdot[1-(-2)] - \frac{1}{2}\cdot\left[1^2-(-2)^2\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[1^3-(-2)^3\right] = 2\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot(1-4) - \frac{1}{3}\cdot\left[1^3-(-8)\right] = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3}$$

$$A = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\,u^2$$

<u>TERCER BLOQUE</u>

A. a) Despeja la matriz **X** en función de **A** e $\mathbf{I_2}$ en la ecuación $\mathbf{(X + A)^2 = X^2 + XA + I_2}$ siendo **X** y **A** matrices cuadradas de orden dos, e $\mathbf{I_2}$ la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B \,.\, X + B^2 = I_2$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{I_2}$ la matriz identidad de orden dos

a)

$$X^2 + 2XA + A^2 - X^2 - XA - I_2^2 = 0 \Rightarrow XA + A^2 - I_2 = 0 \Rightarrow XA = I_2 - A^2 \Rightarrow XAA^{-1} = \left(I_2 - A^2\right)A^{-1} \Rightarrow$$

$$XI_2 = I_2A^{-1} - A^2A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} - A$$

b)

$$BX = I_2 - B^2 \Rightarrow B^{-1}BX = B^{-1}\left(I_2 - B^2\right) \Rightarrow I_2X = B^{-1}I_2 - B^{-1}B^2 \Rightarrow X = B^{-1} - B$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\left(adj\ B^t\right) \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

B. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x - ky = 3 \\ y + 3z = 6 \\ x + kz = 5 \end{cases}$ para el valor del parámetro $k \in \Re$ que el desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es

x = 1 + 2t, **y = …**, **z = …** Determina para que valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas **"y"** y **"z"** que le faltan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & k & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & -3k & -15 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -k & -3k & -12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12+6k \end{array}\right) \Rightarrow -12 + 6k = 0 \Rightarrow$$

$$6k = 12 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 3x - 2y = 3 \Rightarrow 3x = 3 + 2y \Rightarrow x = 1 + \frac{2}{3}y \Rightarrow y + 3z = 6 \Rightarrow 3z = 6 - y \Rightarrow z = 2 - \frac{y}{3} \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(1 + 2\frac{\lambda}{3}\ ,\ \lambda\ ,\ 2 - \frac{\lambda}{3}\right) \Rightarrow Siendo\ \frac{\lambda}{3} = t \Rightarrow \lambda = 3t \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1 + 2t\ ,\ 3t\ ,\ 2 - t)$$

CUARTO BLOQUE

A. El plano α, de ecuación general **x + y + z = 10** corta a las rectas **r₁: x = y = 1**, **r₂: y = z = 2** y **r₃: x = z = 3** en los puntos **A**, **B** y **C** respectivamente. Se pide:

a) Halla el volumen de tetraedro cuyos vértices son **A**, **B**, **C** y **D(1 , 2 , 3)**

b) Determina la distancia del punto **D** hasta la cara opuesta del tetraedro.

a) El volumen del tetraedro es la sexta parte del módulo del producto mixto (producto escalar por producto vectorial) de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$\begin{cases} A \Rightarrow 1 + 1 + z = 10 \Rightarrow z = 8 \Rightarrow A(1\ ,1\ ,8) \\ B \Rightarrow x + 2 + 2 = 10 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow B(6\ ,2\ ,2) \\ C \Rightarrow 3 + y + 3 = 10 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C(3\ ,4\ ,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6\ ,2\ ,2) - (1\ ,1\ ,8) = (5\ ,1\ ,-6) \\ \overrightarrow{AC} = (3\ ,4\ ,3) - (1\ ,1\ ,8) = (2\ ,3\ ,-5) \\ \overrightarrow{AD} = (1\ ,2\ ,3) - (1\ ,1\ ,8) = (0\ ,1\ ,-5) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \cdot \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| \right| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -75 - 12 + 25 + 10 = -52 \Rightarrow$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \cdot \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| \right| = |-52| = 52 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 52 = \frac{26}{3}\ u^3$$

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

b) Es la distancia del punto **d** al plano π que contiene a los puntos **A**, **B** y **C**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6\ ,2\ ,2) - (1\ ,1\ ,8) = (5\ ,1\ ,-6) \\ \overrightarrow{AC} = (3\ ,4\ ,3) - (1\ ,1\ ,8) = (2\ ,3\ ,-5) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,1\ ,8) = (x-1\ ,y-1\ ,z-8) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-8 \\ 5 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi = \alpha$$

$$-5\cdot(x-1) - 12\cdot(y-1) + 15\cdot(z-8) - 2\cdot(z-8) + 18\cdot(x-1) + 25\cdot(y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$13\cdot(x-1) + 13\cdot(y-1) + 13\cdot(z-8) = 0 \Rightarrow (x-1) + (y-1) + (z-8) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x+y+z-10 = 0 \Rightarrow$$

$$Es\ el\ \ plano\ dado\ en\ el\ enunciado\ (comprobación)$$

$$d(D\ ,\pi) = \frac{|1+2+3-10|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

B. a) Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$ equidistante de los puntos **P(-1 , 2 , 1)** y **Q(0 , 3 , 1)**

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π de modo que el simétrico del punto **P** respecto del plano π sea el punto **Q**

a) Sea **R** el punto genérico de la recta y el buscado

$$d(P\ ,R) = d(Q\ ,R) \Rightarrow \sqrt{[1+2t-(-1)]^2 + (-t-2)^2 + (-1-1)^2} = \pm\sqrt{(1+2t-0)^2 + (-t-3)^2 + (-1-1)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(2+2t)^2 + (t+2)^2 + (-2)^2} = \pm\sqrt{(1+2t)^2 + (t+3)^2 + (-2)^2} \Rightarrow$$

$$4+8t+4t^2+t^2+4t+4+4 = 1+4t+4t^2+t^2+6t+9+4 \Rightarrow 5t^2+12t+12 = 5t^2+10t+14 \Rightarrow 2t-2=0 \Rightarrow$$

$$2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow R\begin{cases} x = 1+2\cdot 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow R(3\ ,-1\ ,-1)$$

b) El plano tendrá como vector director el vector **PQ** que es perpendicular al vector formado por el punto **M** medio de **P** y **Q** y el punto **G** genérico del plano π y su producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$$M\begin{cases} x = \dfrac{-1+0}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2} \\ z = \dfrac{1+1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0\ ,3\ ,1) - (-1\ ,2\ ,1) = (1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{MG} = (x\ ,y\ ,z) - \left(-\dfrac{1}{2}\ ,\dfrac{5}{2}\ ,1\right) = \left(x+\dfrac{1}{2}\ ,y-\dfrac{5}{2}\ ,z-1\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MG} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MG} = 0$$

$$(1\ ,1\ ,0)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\ ,y-\frac{5}{2}\ ,z-1\right) = 0 \Rightarrow x+\frac{1}{2}+y-\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x+y-\frac{4}{2} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+2y-4 = 0$$