

PRIMER BLOQUE

A. En 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación

a)

Siendo **a** y **b** los números

$$\begin{cases} a + b = 8 \Rightarrow b = 8 - a \\ P = a \cdot b \cdot (a - b) \end{cases} \Rightarrow P = a \cdot (8 - a) \cdot [a - (8 - a)] = a \cdot (8 - a) \cdot (2a - 8) \Rightarrow$$

$$P' = \frac{dP}{da} = (8 - a) \cdot (2a - 8) - a \cdot (2a - 8) + 2 \cdot a \cdot (8 - a) = (2a - 8) \cdot (8 - 2a) + 16a - 2a^2 = -(2a - 8)^2 + 16a - 2a^2$$

$$P' = -(4a^2 - 32a + 64) + 16a - 2a^2 = -6a^2 + 48a - 64 \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow -6a^2 + 48a - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$-2 \cdot (3a^2 - 24a + 32) = 0 \Rightarrow 3a^2 - 24a + 32 = 0 \Rightarrow \Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 32 = 576 - 384 = 192 \geq 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{24 + 8\sqrt{3}}{6} = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{24 - 8\sqrt{3}}{6} = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{da^2} = -12a + 48 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P''\left(4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -12 \cdot \left(4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + 48 = -48 - \frac{48\sqrt{3}}{3} + 48 = -\frac{48\sqrt{3}}{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ P''\left(4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -12 \cdot \left(4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + 48 = -48 + \frac{48\sqrt{3}}{3} + 48 = \frac{48\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ b = 8 - \left(4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4 \cdot (3 + \sqrt{3})}{3} = 6,31 \\ b = 8 - 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4 \cdot (3 - \sqrt{3})}{3} = 1,69 \end{cases}$$

B. De la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ sabemos que pasa por el punto **(1, 2)** y que tiene

una asíntota oblicua cuya pendiente es **-6**. a) Determina los valores a y b de la función.

b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función

a)

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 + b}{a - 1} = 2 \Rightarrow \frac{a + b}{a - 1} = 2 \Rightarrow a + b = 2a - 2 \Rightarrow -a + b = -2 \\ m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{a - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = \frac{\infty}{-\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\text{Aplicando L'Hopital}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{-2x} = -a \Rightarrow -a = -6 \Rightarrow a = 6 \end{cases} \Rightarrow b = 4$$

b)

$$f(x) = \frac{6x^2 + 4}{6 - x} \Rightarrow 6 - x = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f(6) = \frac{6 \cdot 6^2 + 4}{6 - 6} = \frac{220}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

Asíntota vertical $\Rightarrow x = 6$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la siguiente integral $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

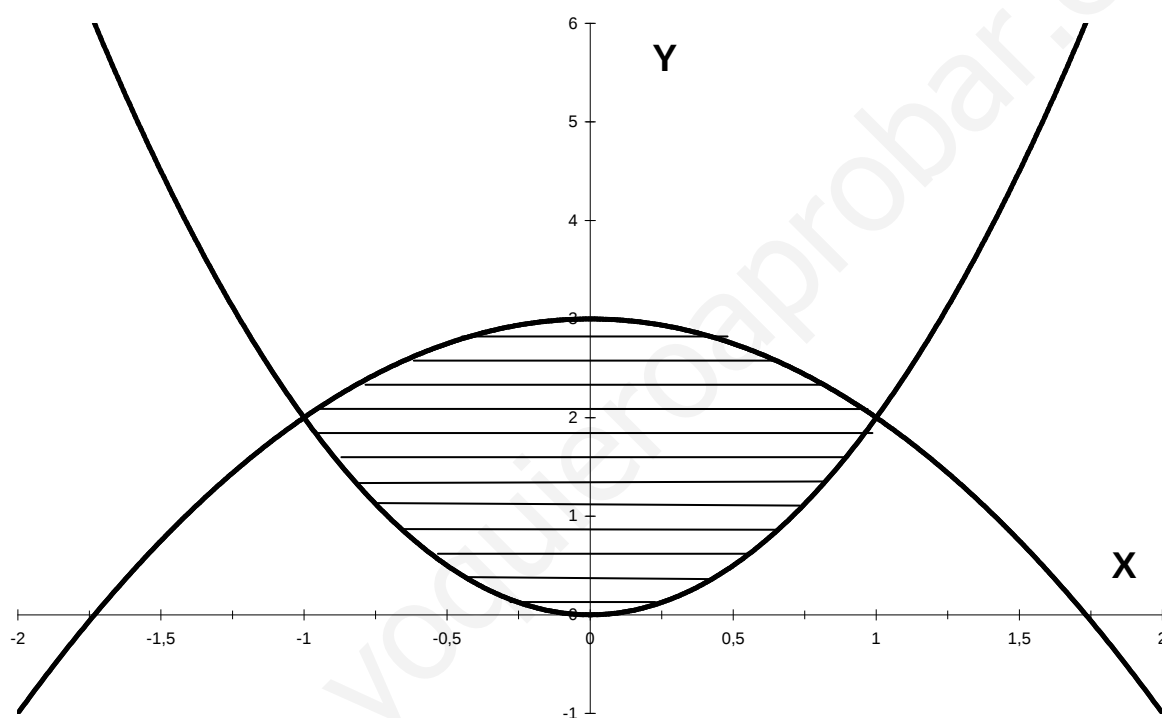
$$I = \int \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int \frac{t-1}{t^3} dt = \int \frac{t}{t^3} dt - \int \frac{1}{t^3} dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-2} dt - \int t^{-3} dt = \frac{1}{(-1)} \cdot t^{-1} - \frac{1}{(-2)} \cdot t^{-2}$$

$$x+1=t \Rightarrow dx=dt \Rightarrow x=t-1$$

$$I = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + K = \frac{1-2(x+1)}{2(x+1)^2} + K = \frac{-2x-1}{2(x+1)^2} + K = -\frac{2x+1}{2(x+1)^2} + K$$

B. Esboza las gráficas de las parábolas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto

a)



b)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow 2x^2 = -x^2 + 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Es simétrica} \Rightarrow A = 2 \int_0^1 (-x^2 + 3) dx - 2 \int_0^1 2x^2 dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 2 \cdot 3 \cdot [x]_0^1 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1$$

$$A = -\frac{2}{3} \cdot (1^3 - 0^3) + 6 \cdot (1 - 0) - \frac{4}{3} \cdot (1^3 - 0^3) = -\frac{2}{3} + 6 - \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ u}^2$$

TERCER BLOQUE

A. Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema $A \cdot X = B$ en forma matricial:

- a) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?
 b) Si la matriz A es de orden 2×3 , ¿puede ser el sistema $A \cdot X = B$ compatible determinado?

Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales, S , es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, A , es igual al rango de la matriz ampliada A/B ; es decir: **S es compatible $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B)$**

a) Un sistema homogéneo nunca puede ser incompatible ya que al ser los términos independientes ceros, siempre se cumple que **$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B)$** y por ello el sistema tiene que ser **compatible determinado o indeterminado**

b) Al tener mas incógnitas (3) que ecuaciones (2) el sistema solo puede ser **compatible indeterminado** cuando **$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) < \text{Número de incógnitas}$** o **incompatible** cuando el rango de los coeficientes es distinto al ampliado, **$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A/B)$**

B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$

b) Resuelve el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$, siendo X e Y dos matrices 2×2

a)

$$AX + IX = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow (A + I)^{-1}(A + I)X = (A + I)^{-1}B \Rightarrow IX = (A + I)^{-1}B \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A + I)^{-1} \Rightarrow$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{|A + I|} \cdot [\text{adj}(A + I)^t] \Rightarrow (A + I)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A + I)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (A + I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} -4X - 4Y = (-2) \cdot A \\ 4X + 3Y = B \end{cases} \Rightarrow -Y = (-2) \cdot A + B = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6X - 6Y = (-3) \cdot A \\ 8X + 6Y = 2B \end{cases} \Rightarrow 2X = (-3) \cdot A + 2B = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

CUARTO BLOQUE

A.- Consideramos los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 3$ y $\pi_3 \equiv -x + 2y + z = 7$, a) Determina su posición relativa

b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & 0 & -1 & | & 3 \\ -1 & 2 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -6 & 2 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow -3 \cdot 2 + z = 0 \Rightarrow z = 6 \Rightarrow$$

$$x + 2 \cdot 2 - 6 = 1 \Rightarrow x + 4 - 6 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{Se cortan en un punto } P(3, 2, 6)$$

b) El ángulo que forman es el de sus vectores directores

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (1, 2, -1) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (3, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}|}{|\vec{v}_{\pi_1}| \cdot |\vec{v}_{\pi_2}|} = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (3, 0, -1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{4}{\sqrt{60}} = \frac{4}{2\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \text{ang}(\pi_1, \pi_2) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{15}}{15}\right) = 58^\circ 54' 33''$$

B. Dados los puntos de coordenadas **A(3, 1, 1)**, **B(0, 2, 2)** y **C(-1, -1, -1)**, se pide:

a) Determina la ecuación general del plano que los contiene

b) Calcular la distancia desde el punto **P(0, 0, 4)** a dicho plano.

a) Tenemos que determinar el plano π , este se halla gracias a los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como son coplanarios y el último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \vec{AB} = (0, 2, 2) - (3, 1, 1) = (-3, 1, 1) \\ \vec{AC} = (-1, -1, -1) - (3, 1, 1) = (-4, -2, -2) \equiv (2, 1, 1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (3, 1, 1) = (x-3, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3) + 2(y-1) - 3(z-1) - 2(z-1) - (x-3) + 3(y-1) = 0 \Rightarrow 5(y-1) - 5(z-1) = 0 \Rightarrow (y-1) - (z-1) = 0$$

$$\pi \equiv y - z = 0$$

b)

$$d(P, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$