PRIMER BLOQUE

A. En 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación

a)

Siendo **a** y **b** los números

$$\begin{cases} a+b=8 \Rightarrow b=8-a \\ P=a\cdot b\cdot(a-b) \end{cases} \Rightarrow P=a\cdot(8-a)\cdot[a-(8-a)]=a\cdot(8-a)\cdot(2a-8)\Rightarrow$$

$$P'=\frac{dP}{da}=(8-a)\cdot(2a-8)-a\cdot(2a-8)+2\cdot a\cdot(8-a)=(2a-8)\cdot(8-2a)+16a-2a^2=-(2a-8)^2+16a-2a^2$$

$$P'=-(4a^2-32a+64)+16a-2a^2=-6a^2+48a-64\Rightarrow P'=0\Rightarrow -6a^2+48a-64=0\Rightarrow$$

$$-2\cdot(3a^2-24a+32)=0\Rightarrow 3a^2-24a+32=0\Rightarrow \Delta=(-24)^2-4\cdot 3\cdot 32=576-384=192\geq 0$$

$$x=\frac{24\pm\sqrt{192}}{2\cdot 3}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{24+8\sqrt{3}}{6}=4+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ x=\dfrac{24+8\sqrt{3}}{6}=4-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Rightarrow P''=\frac{d^2P}{da^2}=-12a+48\Rightarrow$$

$$\begin{cases} P''\left(4+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-12\cdot\left(4+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)+48=-48-\dfrac{48\sqrt{3}}{3}+48=-\dfrac{48\sqrt{3}}{3}<0\Rightarrow Máximo \\ P''\left(4-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-12\cdot\left(4-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)+48=-48+\dfrac{48\sqrt{3}}{3}+48=\dfrac{48\sqrt{3}}{3}>0\Rightarrow Mínimo\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ b=8-\left(4+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=4\cdot\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\cdot(3+\sqrt{3})}{3}=6{,}31 \\ b=8-4-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=4-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=4\cdot\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{4\cdot(3-\sqrt{3})}{3}=1{,}69\end{cases}$$

B. De la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ con $a,b\in\Re$ sabemos que pasa por el punto **(1 , 2)** y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es **-6**. a) Determina los valores a y b de la función.
b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función

a)

$$\begin{cases} f(1)=2\Rightarrow\dfrac{a\cdot 1^2+b}{a-1}=2\Rightarrow\dfrac{a+b}{a-1}=2\Rightarrow a+b=2a-2\Rightarrow -a+b=-2 \\ m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{ax-x^2}=\dfrac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{-2x}=-a\Rightarrow -a=-6\Rightarrow a=6\end{cases}\Rightarrow b=4$$

b)

$$f(x)=\frac{6x^2+4}{6-x}\Rightarrow 6-x=0\Rightarrow x=6\Rightarrow f(6)=\frac{6\cdot 6^2+4}{6-6}=\frac{220}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow$$

$$Asíntota\ vertical\Rightarrow x=6$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la siguiente integral $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

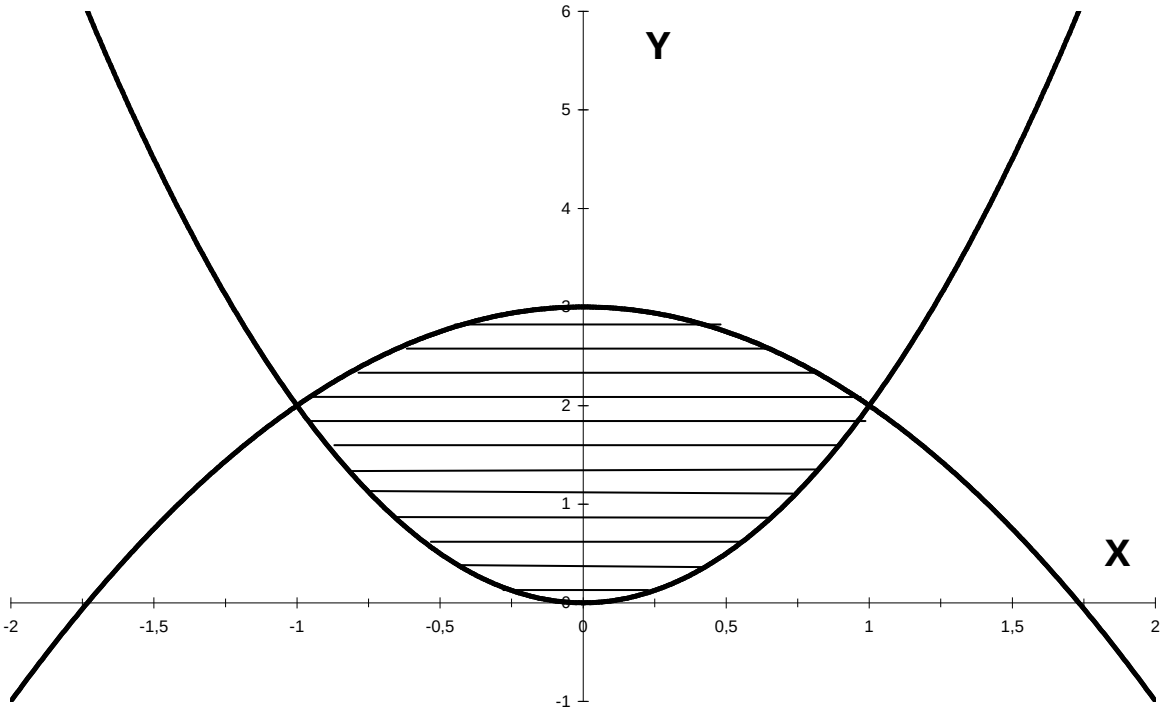
$$I=\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx=\int \frac{t-1}{t^3}\,dt=\int \frac{t}{t^3}\,dt-\int \frac{1}{t^3}\,dt=\int \frac{dt}{t^2}-\int \frac{dt}{t^3}=\int t^{-2}dt-\int t^{-3}dt=\frac{1}{(-1)}\cdot t^{-1}-\frac{1}{(-2)}\cdot t^{-2}$$

$$x+1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow x=t-1$$

$$I=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+K=\frac{1-2(x+1)}{2(x+1)^2}+K=\frac{-2x-1}{2(x+1)^2}+K=-\frac{2x+1}{2(x+1)^2}+K$$

B. Esboza las gráficas de las parábolas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto

a)



b)

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones\Rightarrow 2x^2=-x^2+3\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=\frac{3}{3}=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$Es\ simétrica\Rightarrow A=2\int_0^1\left(-x^2+3\right)dx-2\int_0^1 2x^2\ dx=-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+2\cdot 3\cdot\left[x\right]_0^1-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1$$

$$A=-\frac{2}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+6\cdot\left(1-0^3\right)-\frac{4}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)=-\frac{2}{3}+6-\frac{4}{3}=\frac{12}{3}=4\,u^2$$

TERCER BLOQUE

A. Enuncia el Teorema de Rouché-Fröebenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema **A . X = B** en forma matricial:
a) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?
b) Si la matriz A es de orden 2 x 3, ¿puede ser el sistema **A . X = B** compatible determinado?

Teorema de Rouche-Fröbenius
Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir: **S es compatible $\Leftrightarrow$ rang (A) = rang (A/B)**

a) Un sistema homogéneo nunca puede ser incompatible ya que al ser los términos independientes ceros, siempre se cumple que **rang (A) = rang (A/B)** y por ello el sistema tiene que ser ***compatible determinado*** o ***indeterminado***

b) Al tener mas incógnitas (3) que ecuaciones (2) el sistema solo puede ser ***compatible indeterminado*** cuando **rang (A) = rang (A/B) < Número de incógnitas** o ***incompatible*** cuando el rango de los coeficientes es distinto al ampliado, **rang (A) $\neq$ rang (A/B)**

B. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial **A . X + X = B**
b) Resuelve el sistema $\begin{cases}2X+2Y=A\\ 4X+3Y=B\end{cases}$, siendo **X** e **Y** dos matrices **2 x 2**

$a)$

$$AX+IX=B\Rightarrow (A+I)X=B\Rightarrow (A+I)^{-1}(A+I)X=(A+I)^{-1}B\Rightarrow IX=(A+I)^{-1}B\Rightarrow X=(A+I)^{-1}B$$

$$A+I=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow |A+I|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5-4=1\neq 0\Rightarrow Existe\ (A+I)^{-1}\Rightarrow$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{|A+I|}\cdot\left[adj\ (A+I)^t\right]\Rightarrow (A+I)^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (A+I)^t=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow X=(A+I)^{-1}B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$b)$

$$\begin{cases}-4X-4Y=(-2)\cdot A\\ 4X+3Y=B\end{cases}\Rightarrow -Y=(-2)\cdot A+B=(-2)\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ -4 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -2 & -7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$Y=(-1)\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ -2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-6X-6Y=(-3)\cdot A\\ 8X+6Y=2B\end{cases}\Rightarrow 2X=(-3)\cdot A+2B=(-3)\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -8\\ -2 & -10\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & -8\\ -2 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & -5\end{pmatrix}$$

CUARTO BLOQUE

A.- Consideramos los planos $\pi_1 \equiv x+2y-z=1$, $\pi_2 \equiv 3x-z=3$ y $\pi_3 \equiv -x+2y+z=7$, a) Determina su posición relativa

b) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2 \Rightarrow -3\cdot 2+z=0 \Rightarrow z=6 \Rightarrow$$

$$x+2\cdot 2-6=1 \Rightarrow x+4-6=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow Se\ cortan\ en\ un\ punto\ P(3\ ,2\ ,6)$$

b) El ángulo que forman es el de sus vectores directores

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}}=(1\ ,2\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}}=(3\ ,0\ ,-1) \end{cases} \Rightarrow cos\,(\pi_1\ ,\pi_2)=\frac{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|}=\frac{|(1\ ,2\ ,-1)\cdot(3\ ,0\ ,-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|3+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}$$

$$cos\,(\pi_1\ ,\pi_2)=\frac{4}{\sqrt{60}}=\frac{4}{2\sqrt{15}}=\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{15} \Rightarrow ang(\pi_1\ ,\pi_2)=arc\ cos\left(\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)=58^o 54' 33''$$

B. Dados los puntos de coordenadas **A(3 , 1 , 1)**, **B(0 , 2 , 2)** y **C(-1 , -1 , -1)**, se pide:

a) Determina la ecuación general del plano que los contiene

b) Calcular la distancia desde el punto **P(0 , 0 , 4)** a dicho plano.

a) Tenemos que determinar el plano π, este se halla gracias a los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como son coplanarios y el último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0\ ,2\ ,2)-(3\ ,1\ ,1)=(-3\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1\ ,-1\ ,-1)-(3\ ,1\ ,1)=(-4\ ,-2\ ,-2)\equiv(2\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{AG}=(x\ ,y\ ,z)-(3\ ,1\ ,1)=(x-3\ ,y-1\ ,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(x-3)+2\,(y-1)-3\,(z-1)-2\,(z-1)-(x-3)+3\,(y-1)=0 \Rightarrow 5\,(y-1)-5\,(z-1)=0 \Rightarrow (y-1)-(z-1)=0$$

$$\pi \equiv y-z=0$$

$b)$

$$d(P\ ,\pi)=\frac{|0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\ u$$