PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Dada la función $f(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$, se pide:

a) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo **[1 , 6]**?
b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo **[3 , 11]**?
c) Si en algún caso se cumplen las hipótesis del teorema, calcula el valor para el cual se verifica la tesis del mismo

Teorema del valor medio o de Lagrange

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

a)

$$2-x=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1+2}{2-2}=\frac{3}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow en\ x=2\in[1\ ,6]\ hay\ una\ asíntota\ vertical$$

No se puede aplicar el teorema en el intervalo **[1 , 6]** porque la función no es continua en **x = 2**

b)

Como x = 2$\notin[3\ ,11]$ y la función es continua en dicho intervalo y derivable $f'(x)=\dfrac{3}{(2-x)^2}$ en **(3 , 11)** se puede aplicar el teorema en el intervalo **[3 , 11]**

c)

$$\begin{cases} f(11)=\dfrac{1+11}{2-11}=\dfrac{12}{-9}=-\dfrac{4}{3} \\ f(3)=\dfrac{1+3}{2-3}=\dfrac{4}{-1}=-4 \end{cases}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(11)-f(3)}{11-3}=\frac{-\frac{4}{3}-(-4)}{8}=\frac{4-\frac{4}{3}}{8}=\frac{\frac{8}{3}}{8}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{(2-x)^2}\Rightarrow(2-x)^2=9\Rightarrow 2-x=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\begin{cases}2-x=3\Rightarrow -x=1\Rightarrow x=-1\notin[3\ ,11]\Rightarrow Sin\ solución\\ 2-x=-3\Rightarrow -x=-5\Rightarrow x=5\in[3\ ,11]\Rightarrow c=5\end{cases}$$

B. Dada la función $f(x) = 2 - x^2 e^{-x}$, se pide:

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos

b) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal por la derecha (cuando $x \to \infty$)

a)

$$f'(x) = -\left(2xe^{-x} - x^2 e^{-x}\right) = x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} = \left(x^2 - 2x\right)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 2x\right)e^{-x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$(x-2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = (2x-2)e^{-x} - \left(x^2 - 2x\right)e^{-x} = \left(2x - 2 - x^2 + 2x\right)e^{-x} = \left(-x^2 + 4x - 2\right)e^{-x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f''(0) = \left(-0^2 + 4\cdot 0 - 2\right)e^{-0} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo en } x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 - 0^2 e^{-0} = 2 \Rightarrow (0\ ,2) \\ f''(2) = \left(-2^2 + 4\cdot 2 - 2\right)e^{-2} = \dfrac{2}{e^2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo en } x = 2 \Rightarrow f(0) = 2 - 2^2 e^{-2} = 2 - \dfrac{4}{e^2} \Rightarrow \left(2\ ,2 - \dfrac{4}{e^2}\right) \end{cases}$$

b)

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(2 - x^2 e^{-x}\right) = 2 - \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 2 - \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 2 - 0 = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

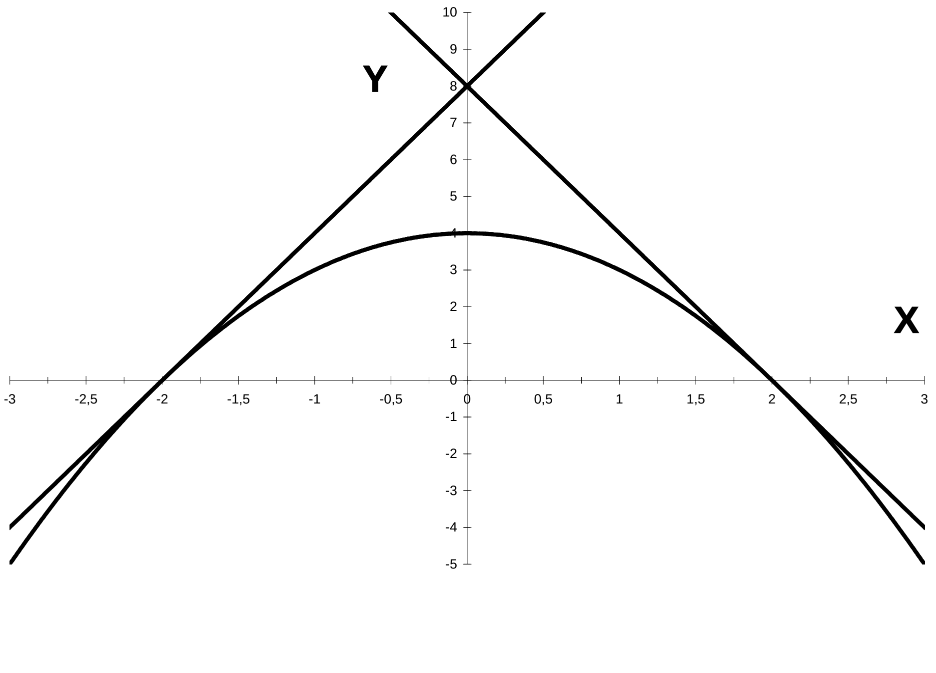
Existe una asíntota horizontal $y = 2$ *cuando* $x \to \infty$

SEGUNDO BLOQUE

A. Considera la parábola $f(x) = -x^2 + 4$. Se pide: a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a **f(x)** en **x = 2** y **x = -2**, esbozando una gráfica con la parábola y las dos rectas tangentes. b) Calcula el área comprendida entre la parábola y dichas rectas tangentes.

a)

$$f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(-2) = -(-2)^2 + 4 = 0 \\ f'(-2) = -2\cdot(-2) = 4 \end{cases} \Rightarrow Ec.\ tangente \Rightarrow y - 0 = 4\cdot[x - (-2)] \Rightarrow y = 4x + 8 \\ \begin{cases} f(2) = -2^2 + 4 = 0 \\ f'(-2) = -2\cdot 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow Ec.\ tangente \Rightarrow y - 0 = (-4)\cdot(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 8 \end{cases}$$



Continuación del Problema A del Segundo Bloque

b)

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} -x^2+4=4x+8 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2 \\ -x^2+4=-4x+8 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

$Es\ simétrico \Rightarrow$

$$A=2\int_0^2(-4x+8)\,dx-2\int_0^2(-x^2-4)\,dx=2\int_0^2(x^2-4x+12)\,dx=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2-8\cdot\left[x^2\right]_0^2+24\cdot\left[x\right]_0^2$$

$$A=\frac{2}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)-8\cdot\left(2^2-0^2\right)+24\cdot(2-0)=\frac{16}{3}-32+48=16+\frac{16}{3}=\frac{4\cdot16}{3}=\frac{64}{3}\ u^2$$

B. Calcula las siguiente integral: $\int\frac{-x+3}{4x^2+9}dx$

$$I=\int\frac{-x+3}{4x^2+9}dx=\int\frac{-x}{4x^2+9}dx+\int\frac{3}{4x^2+9}dx=-\int\frac{1}{t}\frac{dt}{8}+\int\frac{3}{9\left(\frac{4}{9}x^2+1\right)}dx=-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}+\frac{3}{9}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{2}{3}x\right)^2+1\right]}dx$$

$$4x^2+9=t \Rightarrow 8x\,dx=dt \Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{8} \qquad \frac{2}{3}x=u \Rightarrow \frac{2}{3}dx=du \Rightarrow dx=\frac{3}{2}du$$

$$I=-\frac{1}{8}\ln t+\frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{3}{2}du=-\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+9\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+1}du=-\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+9\right)+\frac{1}{2}\ arc\ tg\ u$$

$$I=-\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+9\right)+\frac{1}{2}\ arc\ tg\left(\frac{2}{3}x\right)+K$$

TERCER BLOQUE

A. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcula, si es posible, la matriz **M = BB^t – A^{t}A**, donde **A^t** y **B^t** son las matrices traspuestas de las matrices **A** y **B**

b) Determina el rango de la matriz **M** en función del parámetro $k\in\Re$

a)

$Puede\ calcularse\ ya\ que\ BB^t nos\ da\ una\ matriz\ 3x3\ y\ lo\ mismo\ A^tA\ por\ lo\ tanto\ se\ puede\ restar$

$$M=\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2&k&2k\\k&1&2\\2k&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2-2&k-2&2k\\k-2&-1&2\\2k&2&-4\end{pmatrix}$$

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

b) Será de rango **3** cuando su determinante sea distinto de cero, estudiándolo en los demás casos.

$$Puede\ calcularse\ ya\ que\ BB^t\ nos\ da\ una\ matriz\ 3x3\ y\ lo\ mismo\ A^t A\ por\ lo\ tanto\ se\ puede\ restar$$

$$|M| = \begin{vmatrix} k^2-2 & k-2 & 2k \\ k-2 & -1 & 2 \\ 2k & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4\,(k^2-2) + 4k\,(k-2) + 4k\,(k-2) + 4k^2 - 4\,(k^2-2) + 4\,(k-2)^2$$

$$|M| = 8k\,(k-2) + 4k^2 + 4\,(k-2)^2 = 8k^2 - 16k + 4k^2 + 4(k^2 - 4k + 4) = 12k^2 - 16k + 4k^2 - 16k + 16$$

$$|M| = 16k^2 - 32k + 16 \Rightarrow Si\ |M| = 0 \Rightarrow 16(k^2 - 2k + 1) = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\forall k \in \Re - \{1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rang\ (M) = 3$$

$$Si\ k = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (M) = 1$$

B.- a) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \Re$ el sistema $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y = 0 \\ 3x + \lambda z = 0 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, para los valores $\lambda = -2\ y\ \lambda = -3$

a) Un sistema homogéneo, como es este, siempre es compatible, determinado si el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo e indeterminado cuando lo sea.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - \lambda = \lambda^3 - 4\lambda \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)\lambda = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \forall \lambda \in \Re - \{-2\ ,0\ ,2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow Solución\ trivial \Rightarrow (x\ ,y\ ,z) = (0\ ,0\ ,0)$$

$$Para \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

$b)$

$Para\ \lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3y + z = 0 \Rightarrow z = 3y \Rightarrow$$

$$-2x + y + 3y = 0 \Rightarrow -2x + 4y = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,y\ ,z) = (2\mu\ ,\mu\ ,3\mu)$$

$$Si\ \lambda = -3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado \Rightarrow Solución\ trivial \Rightarrow (x\ ,y\ ,z) = (0\ ,0\ ,0)$$

CUARTO BLOQUE

A. Dada la recta **r** de ecuaciones $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z-2}{-1}$ y el punto **P(1 , 1 , 2)**, se pide:

a) Ecuación general del plano que contiene la recta y al punto

b) Distancia desde el punto **P** a la recta **r**

a) Para hallar el plano π tomaremos el vector director de la recta **r**, el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el punto **P** y el vector formado por **P** y **G**, siendo este punto el generador del plano.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$R(1\ ,-2\ ,2)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\ ,0\ ,-1) \\ \overrightarrow{PR} = (1\ ,-2\ ,2) - (1\ ,1\ ,2) = (0\ ,-3\ ,0) \equiv (0\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,1\ ,2) = (x-1\ ,y-1\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot (z-2) + (x-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2z - 5 = 0$$

b) Hallaremos un plano α perpendicular a la recta r, que tiene como vector director el de la recta, y que contenga al punto **P**, por lo tanto el producto escalar de ese vector y el formado por **P** y el punto **G**, genérico del plano, como son perpendiculares, tiene valor nulo y es la ecuación del plano buscado.

Después hallaremos el punto de corte **Q** entre **r** y el plano α, la distancia de **P** a **Q**, el módulo del vector **PQ**, es la distancia pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha} = \overrightarrow{v_r} = (2\ ,0\ ,-1) \\ \overrightarrow{PG} = (x-1\ ,y-1\ ,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow (2\ ,0\ ,-1) \cdot (x-1\ ,y-1\ ,z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot (x-1) - (z-2) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 2x - z = 0 \Rightarrow$$

$$Punto\ Q \Rightarrow \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \\ \alpha \equiv 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) - (2 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$d(P\ ,r) = d(P\ ,Q) = \sqrt{(1-1)^2 + [1-(-2)]^2 + (2-2)^2} = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3\ u$$

B. Dado los puntos de coordenadas **A(3 , 2 , 2)**, **B(1 , 3 , 3)**, **C(0 , 0 , 2)** y **D(0 , 0 , -1)**,se pide:
a) El área del triángulo de vértices **A**, **B** y **C**
b) Analiza si los cuatro puntos forman un tetraedro y en caso afirmativo halla su volumen.

a) El área del triángulo **ABC** es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,3,3)-(3,2,2) = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,2)-(3,2,2) = (-3,-2,0) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -3\vec{j}+4\vec{k}+3\vec{k}+2\vec{i} = 2\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2+(-3)^2+7^2} = \sqrt{4+9+49} = \sqrt{62}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{62}\ u^2$$

b) Formaran un tetraedro si ninguno de los puntos **A**, **B**, **C** y **D** están alineados, habrá que estudiar los vectores **AB**, **AC** y **AD** son iguales o proporcionales pues en ese caso estarán alineados, lo mismo analizaremos con **BC** y **BD**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,-2,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow A, B\ y\ C\ no\ están\ alineados$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{AD} = (0,0,-1)-(3,2,2) = (-3,-2,-3) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow A, B\ y\ D\ no\ están\ alineados$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (1,3,3)-(0,0,2) = (1,3,1) \\ \overrightarrow{BD} = (0,0,-1)-(0,0,2) = (0,0,-3) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{0} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow B, C\ y\ D\ no\ están\ alineados$$

Así que los cuatro puntos forman un tetraedro cuyo volumen es un sexto del producto mixto (producto escalar por producto vectorial) de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,-2,0) \\ \overrightarrow{AD} = (-3,-2,-3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\right| \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6-12-9-6 = -21$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\right| = |-21| = 21 \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot 21 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\ u^3$$