PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación **sen x = x^2 – 1** tiene al menos una solución. (Indicación: El ángulo x lo consideraremos en radianes)

Teorema de Bolzano

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

Sea la función f(x) = **sen x – (x^2 – 1) = sen x – x^2 + 1,** tomemos el intervalo $[0\ , \pi]$, tomando los siguientes valores en el extremo del intervalo $\begin{cases} f(0) = sen\ 0 - 0^2 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(\pi) = sen\ \pi - \pi^2 + 1 = 0 - \pi^2 + 1 = -\pi^2 + 1 < 0 \end{cases}$

de tal manera que $[sign\ f(0) \neq sign\ f(\pi)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (0\ , \pi)$tal que **f(c) = 0** y por ello **sen c – c^2 + 1 = 0** por lo tanto **sen c = c^2 – 1** existe, al menos, una solución de la ecuación propuesta

B. De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 3 metros, determina la medida de los catetos de aquel que tenga área máxima

Llamando **a** y **b** a los catetos

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3^2 \Rightarrow b^2 = 9 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{9 - a^2} \\ A = \dfrac{1}{2} ab \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} a\sqrt{9 - a^2} \Rightarrow A' = \frac{dA}{da} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9 - a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{9 - a^2}} a \right)$$

$$A' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{9 - a^2}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9 - a^2 - a^2}{\sqrt{9 - a^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{9 - 2a^2}{\sqrt{9 - a^2}} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{9 - 2a^2}{\sqrt{9 - a^2}} = 0 \Rightarrow 9 - 2a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ a = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow No\ es\ solución\ por\ ser\ negativo \end{cases}$$

$$A'' = \frac{d^2 A}{da^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4a\sqrt{9 - a^2} - \dfrac{-2a}{2\sqrt{9 - a^2}}\left(9 - 2a^2\right)}{9 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4a\sqrt{9 - a^2} + \dfrac{a\left(9 - 2a^2\right)}{\sqrt{9 - a^2}}}{9 - a^2} =$$

$$A'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{-4a\left(9 - a^2\right) + a\left(9 - 2a^2\right)}{\sqrt{9 - a^2}}}{9 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dfrac{-36a + 4a^3 + 9a - 2a^3}{\sqrt{9 - a^2}}}{9 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^3 - 27a}{\left(9 - a^2\right)\sqrt{9 - a^2}}$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

$$A''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{2}\cdot\frac{2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-27}{\left[9-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\sqrt{9-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2\left(\frac{18}{4}\right)-27}{\left(9-\frac{18}{4}\right)\sqrt{9-\frac{18}{4}}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{9-27}{\frac{18}{4}\sqrt{\frac{18}{4}}}<0\Rightarrow Max.$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\ m. \\ b=\sqrt{9-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{9-\dfrac{18}{4}}=\sqrt{\dfrac{18}{4}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}m \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Sea $a\in\Re$ una constante real no nula, y considera la parábola $f(x)=ax^2-4a$. Encuentra el valor de a para que se verifiquen simultáneamente las dos siguientes condiciones: 1ª que el área comprendida entre la parábola y el eje de abcisas sea de **32** unidades cuadradas. 2ª que la función f(x) sea cóncava hacia arriba $(\cup)$

1^a

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow ax^2-4a=0\Rightarrow a\cdot\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=2\end{cases}$$

$$f(-x)=a\,(-x)^2-4a=ax^2-4a=f(x)\Rightarrow Simétrico\ respecto\ a\ OY$$

$$1\in(0\ ,2)\Rightarrow f(1)=a\cdot 1^2-4a=-3a\Rightarrow Negativo$$

$$32=2\cdot\left|\int_0^2\left(ax^2-4a\right)dx\right|\Rightarrow 16=\int_0^2\left(-ax^2+4a\right)dx\Rightarrow 16=-a\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2+4a\cdot[x]_0^2\Rightarrow$$

$$16=-\frac{a}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)+4a\cdot(2-0)\Rightarrow 16=-\frac{8a}{3}+8a\Rightarrow 16=\frac{-8a+24a}{3}\Rightarrow 16=\frac{16a}{3}\Rightarrow 16a=48\Rightarrow a=3$$

2^a

$$f(x)=3x^2-4\cdot 3=3x^2-12\Rightarrow f'(x)=6x\Rightarrow f''(x)=6>0\Rightarrow Concava\ en\ todo\ su\ dominio$$

B. Encuentra una primitiva de $x^2 sen\ x$ que pase por el origen de coordenadas.

$$F(x)=\int x^2 sen\ x\ dx=-x^2\cos x-\int(-\cos x)\,2x\ dx=-x^2\cos x+2\int x\cos x\ dx=-x^2\cos x+x sen\ x-\int sen\ x\ dx$$

$$Por\ partes\begin{cases}x^2=u\Rightarrow 2x\ dx=du\\ sen\ x\ dx=dv\Rightarrow v=\int sen\ x\ dx=-\cos x\end{cases}\qquad\begin{cases}x=u\Rightarrow dx=du\\ \cos x\ dx=dv\Rightarrow v=\int\cos x\ dx=sen\ x\end{cases}$$

$$F(x)=-x^2\cos x+x sen\ x-(-\cos x)=-x^2\cos x+x sen\ x+\cos x+K\Rightarrow$$

$$F(0)=0\Rightarrow -0^2\cdot\cos 0+0\cdot sen\ 0+\cos 0+K=0\Rightarrow 0+0+1+K=0\Rightarrow K=-1\Rightarrow$$

$$F(x)=-x^2\cos x+x sen\ x+\cos x-1$$

TERCER BLOQUE

A. Razona si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial **A . X + 2 A = I$_3$** donde **X** es una matriz **3 x 3** e **I$_3$** es la matriz identidad de orden **3**

Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t \right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = I_3 - 2A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(I_3 - 2A) \Rightarrow IX = A^{-1}I_3 - 2A^{-1}A \Rightarrow X = A^{-1} - 2I_3$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

B.- Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + y = 4 \\ ax - y = 6 \\ x - ay = -6 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in \Re$ resolviendo cuando sea compatible determinado

Este sistema será compatible (indeterminado o determinado) cuando una de sus ecuaciones, al menos, sea combinación lineal de las otras y, por ello, el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada tiene que ser nulo.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & -1 & 6 \\ 1 & -a & -6 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 4a^2 + 4 + 6a + 6a = -4a^2 + 12a + 16 \Rightarrow Si\ |A/B| = 0 \Rightarrow -4a^2 + 12a + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$(-4) \cdot \left(a^2 - 3a - 4\right) = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-1\ ,\ 4\} \Rightarrow |A/B| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A/B) = 3 \neq rang\ (A) = 2 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$rang(A) = 1 \neq rang(A/B) = 2 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

$Si\ a = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A/B) = rang\ (A) = 2 \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$-5y = -10 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y) = (2\ ,2)$$

CUARTO BLOQUE

A. Dadas las rectas**:** $r \equiv \begin{cases} z = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Estudia su posición relativa

b) Determina los puntos $R \in r\ y\ S \in s$ por los que se alcanza la distancia mínima entre ambas rectas

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} z = 4 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} z = 0 \\ x = 2 - y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 - \mu \\ \lambda = \mu \\ 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Como\ 4 \neq 0 \Rightarrow Sistema\ Incompatible \Rightarrow$$

$No\ son\ coincidentes\ ni\ se\ cortan\ en\ un\ punto$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{v_S} = (-1\ ,1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ proporcionales \Rightarrow No\ son\ paralelas$$

$Las\ rectas\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$

b) Hallaremos una recta t que es perpendicular a **r** y a **s** y cuyo vector director es la de una recta que se apoya en las dos rectas dadas y cuyos productos escalares con los directores de la recta son nulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (\lambda - (2 - \mu)\ , \lambda - \mu\ , 0 - 0) = (\lambda + \mu - 2\ , \lambda - \mu\ , 0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1\ ,1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_r} \Rightarrow (\lambda + \mu - 2\ , \lambda - \mu\ , 0) \cdot (1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{v_t} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{v_s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - 2\ , \lambda - \mu\ , 0) \cdot (1\ ,1\ ,0) = 0 \Rightarrow \lambda + \mu - 2 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \\ (\lambda + \mu - 2\ , \lambda - \mu\ , 0) \cdot (-1\ ,1\ ,0) = 0 \Rightarrow -\lambda - \mu - 2 + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow -2\mu - 2 = 0 \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \end{cases}$$

$De\ la\ recta\ r \Rightarrow R(1\ ,1\ ,4)$ $De\ la\ recta\ s \Rightarrow S(2 - (-1)\ , -1\ ,0) \Rightarrow S(3\ , -1\ ,0)$

B. Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 2$ y las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \quad ,t \in \Re \\ z = 2t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s \quad ,s \in \Re \\ z = 2 \end{cases}$

a) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a $\mathbf{r_1}$?
b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a $\mathbf{r_2}$?
c) Si en algún caso la respuesta es afirmativa, halla la ecuación general de dicho plano

a y b) Si la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_{r_{12}}} = (1\ ,-1\ ,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{r_{12}}} = (1\ ,1\ ,1)\cdot(1\ ,-1\ ,2) = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

No son perpendiculares los vectores directores por lo tanto π *y* r_1 *no son paralelos*

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_{r_{22}}} = (1\ ,-1\ ,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{r_{12}}} = (1\ ,1\ ,1)\cdot(1\ ,-1\ ,0) = 1 - 1 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_{r_{22}}}$$

Son perpendiculares los vectores directores por lo tanto π *y* r_1 *son paralelos*

c) Es un plano α que tiene como vectores directores al del plano π y al de la recta $\mathbf{r_2}$ y por el vector formado por un punto cualquiera **R** de la recta $\mathbf{r_2}$ (tomaremos el indicado en su ecuación) y **G** siendo este el punto generador de la recta**.**
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$R = (1\ ,0\ ,2)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_{r_{22}}} = (1\ ,-1\ ,0) \\ \overrightarrow{RG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (1\ ,0\ ,2) = (x - 1\ ,\ y\ ,\ z - 2) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - (z-2) - (z-2) + (x-1) = 0$$

$$x - 1 + y - 2\,(z - 2) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x + y - 2z + 3 = 0$$