PRIMER BLOQUE

A. Dadas las funciones $f(x)=ln\left(1-x^2\right)$ y $g(x)=ln\left(1+x^2\right)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas

b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión

a)

$$1-x^2>0 \Rightarrow (1+x)\cdot(1-x)>0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x>0 \Rightarrow x>-1 \\ 1-x>0 \Rightarrow -x>-1 \Rightarrow x<1 \end{cases}$$

	$-\infty$ -1	-1 1	1 ∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

$$Dom(f)=\forall x\in\Re\,/-1<x<1$$

$$1+x^2>0 \Rightarrow x^2>-1 \Rightarrow x>\pm\sqrt{-1} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow 1+x^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \Rightarrow Dom(g)=\forall x\in\Re$$

b)

$$f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2\frac{\left(1-x^2\right)-(-2x)x}{\left(1-x^2\right)^2}=-2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=-2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=0 \Rightarrow 1+x^2=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow No\ tiene\ Pun.\ inf\ l.$$

$$g'(x)=\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow g''(x)=2\frac{\left(1+x^2\right)-2xx}{\left(1+x^2\right)^2}=2\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=2\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$g''(x)=0 \Rightarrow 2\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow Posibles\ puntos\ de\ inf\ lexión$$

$$g'''(x)=2\frac{-2x\left(1+x^2\right)^2-2\left(1+x^2\right)2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=2\frac{-2x\left(1+x^2\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=2\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

$$g'''(x)=4x\frac{x^2-3}{\left(1+x^2\right)^3} \Rightarrow \begin{cases} g'''(1)=4\cdot 1\frac{1^2-3}{\left(1+1^2\right)^3}=\frac{-8}{8}=-1\neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión\ en\ x=1 \\ g'''(-1)=4\cdot(-1)\frac{(-1)^2-3}{\left[1+(-1)^2\right]^3}=\frac{8}{8}=1\neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión\ en\ x=-1 \end{cases}$$

B. Determinar el valor de los parámetros $a,b \in \Re$ para que la función $f(x) = \left(ax^2 + bx\right)e^{-x}$ tenga un extremos relativo en el punto de abcisa **x = 3** y, además, pase por el punto $\left(1, -\frac{1}{e}\right)$.

Halla la ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto de abcisa **x = 0**

$$f'(x) = (2ax + b)\,e^{-x} - \left(ax^2 + bx\right)e^{-x} = \left(2ax + b - ax^2 - bx\right)e^{-x} = \left[-ax^2 + (2a - b)x + b\right]e^{-x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow \left(a \cdot 1^2 + b \cdot 1\right)e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{a+b}{e} = -\frac{1}{e} \Rightarrow a + b = -1 \\ f'(3) = 0 \Rightarrow \left[-a \cdot 3^2 + (2a - b)\cdot 3 + b\right]e^{-3} = 0 \Rightarrow \frac{-9a + 6a - 3b + b}{e^3} = 0 \Rightarrow -3a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = -2 \\ -3a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-a = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2 + b = -1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow f(x) = \left(2x^2 - 3x\right)e^{-x}$$

$$f'(x) = (4x - 3)\,e^{-x} - \left(2x^2 - 3x\right)e^{-x} = \left(-2x^2 + 7x - 3\right)e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \left(2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0\right)e^0 = 1 \\ m = f'(0) = \left(-2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 - 3\right)e^0 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Ecuación\ tangente \Rightarrow y - 1 = -3\,(x - 0) \Rightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow 3x + y - 1 = 0$$

SEGUNDO BLOQUE

A. De la función $f(x) = (x + a)\,sen\,(x)$, donde **a** es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto de abcisa **x = 0**. Calcula el valor de **a**

$$f'(x) = sen\,(x) + (x + a)\cos\,(x) \Rightarrow m = f'(0) = sen\,0 + (0 + a)\cos\,0 = 0 + a \cdot 1 = a$$

$$3a = \int_0^{\pi} (x + a)\,sen\,(x)\,dx \Rightarrow 3a = -\left[(x + a)\cos\,(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left[-\cos\,(x)\right]dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + a = u \Rightarrow dx = du \\ sen\,(x)\,dx = dv \Rightarrow v = \int sen\,(x)\,dx = -\cos\,(x) \end{cases}$$

$$3a = -\left[(\pi + a)\cos\,(\pi) - (0 + a)\cos\,(0)\right] + \int_0^{\pi}\cos\,(x)\,dx \Rightarrow 3a = -\left[(\pi + a)\cdot(-1) - a \cdot 1\right] + \left[sen\,(x)\right]_0^{\pi}$$

$$3a = -\left[-\pi - a - a\right] + \left[sen\,(\pi) - sen\,(0)\right] \Rightarrow 3a = -(-\pi - 2a) + (0 - 0) \Rightarrow a = \pi + 2a \Rightarrow -a = \pi \Rightarrow a = -\pi$$

B. Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de la función **f(x)**:

a) Comprueba que **f(x)** es una función creciente en $\Re$

b) Calcula el área determinada por la gráfica de **f(x),** el eje de abcisas y las rectas **x = -1** y **x = 1**

Dadas dos funciones, **f(x)** y **F(x)**, definidas en un intervalo **S = [a , b]**, diremos que **F(x)** es una función **primitiva** de **f(x)** si la derivada de **F(x)** es la función **f(x)** en el intervalo **S**

$$F(x)\,es\ primitiva\ de\ f(x)\,en\ S \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in S$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

a)

$$f(x)=F'(x)=2xe^{x^2} \Rightarrow f'(x)=F''(x)=2\left(e^{x^2}+2xxe^{x^2}\right)=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)\Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)>0\Rightarrow\begin{cases} 2>0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ e^{x^2}>0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ 1+2x^2>0\Rightarrow 2x^2>-1\Rightarrow x^2>-\frac{1}{2}\Rightarrow x>\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

Como es creciente para los tres factores del producto, la función es creciente en todo $\Re$

b)

Punto de corte con OX $\Rightarrow y=0\Rightarrow 2xe^{x^2}=0\Rightarrow x=0$

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-e^{\frac{1}{4}}\Rightarrow Negativo\Rightarrow x\in[-1\ ,0] \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{\frac{1}{4}}\Rightarrow Positiva\Rightarrow x\in[0\ ,1] \end{cases}$$

$$f(-x)=2\,(-x)e^{(-x)^2}=-2xe^{x^2}=-f(x)\Rightarrow Simétrica\ respecto\ al\ origen\ de\ coordenadas$$

$$A=2\int_0^1 2xe^{x^2}dx=2\int_0^1 e^t dt=2\cdot\left[e^t\right]_0^1=2\cdot\left(e^1-e^0\right)=2\cdot(e-1)\,u^2$$

$$x^2=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=0\Rightarrow t=0 \end{cases}$$

<u>TERCER BLOQUE</u>

A. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=6$, calcular el valor de $\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & z+7 & 3 \\ y & y & 3 \\ x & x-3 & 3 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & z+7 & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x-3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & z & 1 \\ y & y & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}+\frac{3}{2}\cdot\begin{vmatrix} z & 7 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ x & -3 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\frac{3}{2}\cdot 0+\frac{3}{2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\cdot 6=-9$$

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 12 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$$

B. a) Clasifica el sistema $\begin{cases} x - 2y + az = 0 \\ -ay + 2z = 0 \\ 2x - y + (a+1)z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in \Re$, y resuélvelo para **a = -2**

Es un sistema homogéneo, lo que quiere decir que, menos para aquellos valores que hagan que el rango de los coeficientes sea dos o menor de dos que en ese caso es compatible indeterminado, todos los demás valores nos dan un sistema compatible determinado con una única solución la llamada trivial **(0 , 0 , 0)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 2 & -1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -a & 2 \\ 0 & 3 & a+1-2a \\ 0 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 3 & 1-a \\ 0 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 1-a+\frac{6}{a} \\ 0 & 0 & 1-a+\frac{6}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow 1 - a + \frac{6}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$-a^2 + a + 6 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1) + 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \geq 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+5}{2} = 3 \\ a = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

$\forall a \in \Re - \{-2\ , 3\} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$Cuando\ a = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Cuando\ a = -2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y - z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow x - 2 \cdot (-z) - 2z = 0 \Rightarrow x + 2z - 2z = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$Solución \Rightarrow (x\ , y\ , z) = (0\ , -\lambda\ , \lambda)$

CUARTO BLOQUE

A.- Dados el plano $\pi \equiv x - y + z + k = 0$, donde $k \in \Re$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y + 1 = -z$, se pide:

a) Demuestra que para cualquier valor de $k \in \Re$, la recta **r** es paralela al plano π

b) Determina el valor de $k \in \Re$ de forma que la recta **r** este contenida en el plano π

a) Los vectores directores, si son paralelos, son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = (1, -1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow$$

$$El\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos$$

b) Si esta contenida en el plano, aparte de ser perpendicular al plano como ya se ha demostrado en el apartado anterior, un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) debe de pertenecer al plano

$$R(3, -1, 0) \Rightarrow 3 - (-1) + 0 + k = 0 \Rightarrow 4 + k = 0 \Rightarrow k = -4$$

B. Dado el punto **P(2 , 2 , 1)** y el plano π de ecuaciones $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = t \end{cases}$, se pide:

a) Distancia del punto P al plano π
b) Ecuaciones generales de la que pasa por el punto **P** y es perpendicular a π'

Para hallar la ecuación del plano π utilizaremos los vectores determinados en su ecuación y el vector formado por el punto **Q** indicado en la ecuación y **G**, siendo este el punto genérico del plano que se quiere hallar.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **QG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_2} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{QG} = (x, y, z) - (1, 1, 0) = (x - 1, y - 1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1) + z - z - (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) - (y-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$$

b) El vector de la recta **s** perpendicular al plano tiene como vector director el del plano

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (1, 1, 0) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$