

PRIMER BLOQUE

A. Calcula los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) \right]^{\frac{1}{\cos(x)}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = \frac{0^3 - 8 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0}{0^2 - 0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 16x + 7}{2x - 1} = \frac{3 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 + 7}{2 \cdot 0 - 1} = \frac{7}{-1} = -7$

b) $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) \right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = \left[\frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = [1 + 0]^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \Rightarrow$

$\ln L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) \right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} \ln \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) \right]}{\cos(x)} = \frac{\ln \left[\frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$

$= \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\frac{2}{\pi} - \text{sen}(x)}{\frac{2x}{\pi} + \cos(x)}}{-\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2 - \pi \text{sen}(x)}{\pi}}{-\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \text{sen}(x)}{2x + \pi \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \text{sen}(x)}{-\text{sen}(x)} =$

$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 - \pi \text{sen}(x)}{-\text{sen}(x) \cdot [2x + \pi \cos(x)]} = \frac{2 - \pi \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left[2 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]} = \frac{2 - \pi}{(-1)[\pi + 0]} = -\left(\frac{2 - \pi}{\pi}\right) = \frac{\pi - 2}{\pi} \Rightarrow$

$\ln L = \frac{\pi - 2}{\pi} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) \right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = e^{\frac{\pi - 2}{\pi}}$

B. Definición de punto de inflexión en un punto. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$

Una función f tiene un punto de inflexión en $x = x_0$ si en este punto la función cambia su curvatura, es decir, pasa de ser cóncava a ser convexa o de ser convexa a ser cóncava, y por ello, $f''(x_0) = 0$

$\begin{cases} f'(x) = e^x + (x - a)e^x + b = (x - a + 1)e^x + b \\ f''(x) = e^x + (x - a + 1)e^x = (x - a + 2)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \Rightarrow (0 - a + 1)e^0 + b = 0 \Rightarrow -a + 1 + b = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow (0 - a + 2)e^0 = 0 \Rightarrow -a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$a = 2 \Rightarrow -2 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = (x - 2)e^x + x$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la integral indefinida $\int \left(\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} \right) dx$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 9x^2 + 9x + 6 \\ \hline -2x^3 + 10x^2 - 12x \\ \hline x^2 - 3x + 6 \\ \hline -x^2 + 5x - 6 \\ \hline 2x \end{array} \quad \begin{array}{l} |x^2 - 5x + 6 \\ 2x + 1 \end{array}$$

$$\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow A(x-3) + B(x-2) = 2x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow A(3-3) + B(3-2) = 2 \cdot 3 \Rightarrow B = 6 \\ x = 2 \Rightarrow A(2-3) + B(2-2) = 2 \cdot 2 \Rightarrow -A = 4 \Rightarrow A = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-4}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

$$I = \int \left(\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} \right) dx = \int (2x + 1) dx - 4 \int \frac{dx}{x-2} + 6 \int \frac{dx}{x-3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + x - 4 \int \frac{dt}{t} + 6 \int \frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} x-2 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-3 = u \Rightarrow dx = du \end{cases}$$

$$I = x^2 + x - 4 \ln t + 6 \ln u = x^2 + x + \ln \frac{u^6}{t^4} = x^2 + x + \ln \frac{(x-3)^6}{(x-2)^4} + K$$

B. Calcula la integral definida $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x) dx$

$$I = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x) dx = \left[e^x \operatorname{sen}(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx = \left[e^{\pi} \operatorname{sen}(\pi) - e^0 \operatorname{sen}(0) \right] - \left\{ \left[e^x \cos(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x [-\operatorname{sen}(x)] dx \right\}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x) = u \Rightarrow du = \cos(x) dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(x) = u \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x) dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$I = (e^{\pi} \cdot 0 - 1 \cdot 0) - \left[e^x \cos(x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x) dx = -\left[e^{\pi} \cos(\pi) - e^0 \cos(0) \right] - I \Rightarrow 2I = -\left[e^{\pi} \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \right] \Rightarrow$$

$$2I = e^{\pi} + 1 \Rightarrow I = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x) dx = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

TERCER BLOQUE

A. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Encuentra la expresión general de la potencia n-esima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera
- b) Razona que la matriz **A** tiene inversa para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y calcula dicha matriz inversa

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Existe la matriz inversa cuando el determinante de la matriz no es nulo.

$$|A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-n} \Rightarrow A^{-n} = \frac{1}{|A^n|} [adj(A^n)]^t \Rightarrow (A^n)^t = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-n} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B.- Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + z = a \end{cases}$$

- a) sea compatible determinado
- b) sea compatible determinado
- c) sea incompatible

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Ningún valor de } a \text{ hace que el sistema sea Compatible Determinado}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2-1 \end{array} \right) \Rightarrow a-3=0 \Rightarrow a=3$$

Si $a = 3 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

c) $\forall a \in \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

CUARTO BLOQUE

A. Dado los vectores $\vec{u} = (a, b, 1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, c)$, determina los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathfrak{R}$ de manera que los vectores \vec{u} y \vec{w} sean perpendiculares y además $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$ donde \times denota el producto vectorial. ¿Que ángulo forman \vec{u} y \vec{v} en dicho caso?

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (a, b, 1) \cdot (1, 2, c) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0 \\ \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = bc\vec{i} + \vec{j} + 2a\vec{k} - b\vec{k} - 2\vec{i} - ac\vec{j} = (bc-2)\vec{i} + (1-ac)\vec{j} + (2a-b)\vec{k} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 2b + c = 0 \\ \vec{v} = (-3, 4, 1) = (bc-2, 1-ac, 2a-b) \Rightarrow \begin{cases} bc-2 = -3 \\ 1-ac = 4 \\ 2a-b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = -1 \\ ac = -3 \\ 2a-b = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3b \Rightarrow 6b - b = 1 \Rightarrow 5b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{5} = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \\ c = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1 \right) \equiv (3, 1, 5) \\ \vec{v} = (-3, 4, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(3, 1, 5) \cdot (-3, 4, 1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{|-9 + 4 + 5|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{26}} = \frac{0}{\sqrt{910}}$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arc cos } 0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares}$$

B. Dado los puntos $\mathbf{A}(1, 1, 1)$, $\mathbf{B}(1+\lambda, 2, 1-\lambda)$ y $\mathbf{C}(1+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda)$, donde $\lambda \in \mathfrak{R}$:

a) Prueba que los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} forman un ángulo de 90° , independientemente de los valores de λ

b) Determinar los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} sea igual a **3**

a) Si los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son perpendiculares su producto escalar debe de ser nulo

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1+\lambda, 2, 1-\lambda) - (1, 1, 1) = (\lambda, 1, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (1+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda) - (1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, 1+\lambda) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\lambda, 1, -\lambda) \cdot (\lambda, \lambda, 1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

b) La hipotenusa es el modulo del vector \overrightarrow{BC}

$$\overrightarrow{BC} = (1+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda) - (1+\lambda, 2, 1-\lambda) = (0, \lambda-1, 1+2\lambda) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (\lambda-1)^2 + (1+2\lambda)^2} = 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 + 4\lambda + 4\lambda^2 = 3^2 \Rightarrow 5\lambda^2 + 2\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-7) = 144 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 5}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{-2+12}{10} = 1 \\ \lambda = \frac{-2-12}{10} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es