**PRIMER BLOQUE**

**A.** Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica.

Determina los valores de $k, p \in \Re$ para que la función $\begin{cases} \dfrac{k+x}{x-1} & si \quad x \le 0 \\ e^x + p & si \quad x > 0 \end{cases}$ verifique la hipótesis de dicho teorema en el intervalo **[-1 , 3]**

**Teorema del valor medio o de Lagrange**

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Geometricamente, como **f'(c)** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**

La primera condición es que la función sea **continua,** puede haber problemas en **x = 0**

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{k+0}{0-1} = -k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^0 + p = 1 + p \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow -k = 1 + p \Rightarrow p + k = -1$$

Veamos si es derivable, puede haber problemas en **x = 0**

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1+k}{(x-1)^2} & si \quad x \le 0 \\ e^x & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\dfrac{1+k}{(0-1)^2} = -1-k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \Rightarrow -1-k = 1 \Rightarrow$$

$$-k = 2 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow p - 2 = -1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2+x}{x-1} & si \quad x \le 0 \\ e^x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

**B.** Determinar los valores $a, b \in \Re$ para que la función $f(x) = a\ sen\ (x) + b\ cos\ (x)$ pase por el punto $\left( \dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right)$ y además cumpla que la pendiente de la recta tangente en el punto de abcisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ sea **5**. Calcula la derivada de orden 2008 de dicha función

$$f'(x) = a\ cos\ (x) - b\ sen\ (x) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow a\ sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + b\ cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}a + \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = \sqrt{2} \\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5 \Rightarrow a\ cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - b\ sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5 \Rightarrow 0 \cdot a - 1 \cdot b = 5 \Rightarrow -b = 5 \end{cases}$$

$$b = -5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a - 5 = 2 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow f(x) = 7\ sen\ (x) - 5\ cos\ (x)$$

**Continuación del Problema B del Primer Bloque**

$$f(x)=7\ sen\ (x)-5\ cos\ (x)\Rightarrow f'(x)=7\ cos\ (x)+5\ sen\ (x)\Rightarrow f''(x)=-7\ sen\ (x)+5\ cos\ (x)$$

$$f'''(x)=-7\ cos\ (x)-5\ sen\ (x)\Rightarrow f^{IV}(x)=7\ sen\ (x)-5\ cos\ (x)\Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} 2008 & 4 \\ \hline 008 & 502 \\ 0 & \end{array}$$

$$f^{MMVIII}(x)=f^{IV}(x)=7\ sen\ (x)-5\ cos\ (x)$$

**SEGUNDO BLOQUE**

**A.** Enuncia la regla de Barrow. Calcula la integral definida $\int_0^1 \left(x^2+x\right)e^x dx$

**Regla de Barrow**

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, y sea **F(x)** una primitiva de **f(x)** en **[a , b]**; entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$\int_0^1 \left(x^2+x\right)e^x dx=\left[\left(x^2+x\right)e^x\right]_0^1-\int_0^1 (2x+1)\,e^x dx=\left(1^2+1\right)e^1-\left(0^2+0\right)e^0-\left\{\left[(2x+1)\,e^x\right]_0^1-\int_0^1 2\,e^x dx\right\}$$

$$\begin{cases} x^2+x=u\Rightarrow du=(2x+1)\,dx \\ e^x dx=dv\Rightarrow v=\int e^x dx=e^x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+1=u\Rightarrow du=2\,dx \\ e^x dx=dv\Rightarrow v=\int e^x dx=e^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left(x^2+x\right)e^x dx=2\,e-0\cdot 1-\left[(2\cdot 1+1)\,e^1-\left(2\cdot 0^2+1\right)e^0\right]+\int_0^1 2\,e^x dx=2\,e-3e+1+2\cdot\left[e^x\right]_0^1=$$

$$\int_0^1 \left(x^2+x\right)e^x dx=-e+1+2\cdot\left(e^1-e^0\right)=-e+1+2\,(e-1)=-e+1+2e-2=e-1$$

**B.** Calcula la integral $\int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}\,dx$. Indicación: Puede ayudarte hacer un cambio de variable adecuado.

$$I=\int \frac{e^x+1}{1+e^{2x}}e^x\ dx=\int \frac{t+1}{1+t^2}\,dt=\int \frac{t}{1+t^2}\,dt+\int \frac{1}{1+t^2}\,dt=\int \frac{1}{u}\frac{du}{2}+arc\ tg\ t=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}+arc\ tg\ e^x$$

$$e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt \qquad 1+t^2=u\Rightarrow 2t\ dt=du\Rightarrow t\ dt=\frac{du}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}ln\ u+arc\ tg\ e^x=\frac{1}{2}ln\left(1+t^2\right)+arc\ tg\ e^x=\frac{1}{2}ln\left(1+e^{2x}\right)+arc\ tg\ e^x+K=ln\sqrt{1+e^{2x}}+arc\ tg\ e^x+K$$

**TERCER BLOQUE**

**A.** Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, donde $\lambda\in\Re$

a) Estudia, en función del parámetro $\lambda$, el rango de **A . B**

b) razona que la matriz B . A tiene inversa para cualquier $\lambda\in\Re$, y calcula dicha matriz inversa

*a )*

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ \lambda & 0 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ \lambda & 0 & 1\\ \lambda & 0 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ \lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\forall\lambda\in\Re\Rightarrow rang(A\cdot B)=2$$

b) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -\lambda\\ 3 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow|B\cdot A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -\lambda\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-3\lambda-3+3\lambda=-3\neq 0$$

$$\forall\lambda\in\Re\Rightarrow|B\cdot A|=3\neq 0\Rightarrow Existe\ (B\cdot A)^{-1}\Rightarrow(B\cdot A)^{-1}=\frac{1}{|B\cdot A|}\cdot\left[adj\ (B\cdot A)^t\right]\Rightarrow(B\cdot A)^t=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 3\\ -\lambda & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ (B\cdot A)^t=\begin{pmatrix}-3 & \lambda\\ -3 & \lambda+1\end{pmatrix}\Rightarrow(B\cdot A)^{-1}=\frac{1}{(-3)}\cdot\begin{pmatrix}-3 & \lambda\\ -3 & \lambda+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\lambda}{3}\\ 1 & -\frac{\lambda+1}{3}\end{pmatrix}$$

**B**.- Considérese el sistema de ecuaciones lineales **A . X = B** donde

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2a & a & -1\\ 1 & -a & 1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\ y\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

siendo **a** un parámetro real. Se pide:

a) Clasifica el sistema en función del parámetro $a\in\Re$

b) Para a = 0 obtén las soluciones mediante el cálculo **X = A$^{-1}$. B**

*a )*

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2a & a & -1\\ 1 & -a & 1\end{vmatrix}=a+1-4a^2-2a-a+2a=-4a^2+1\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -4a^2+1=0\Rightarrow 4a^2=1\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\forall a\in\Re-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

*a )Continuación*

$$Si\ a = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 10 \Rightarrow z = \frac{10}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

*Sistema Incompatible*

$$Si\ a = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

$$0z = -10 \Rightarrow z = -\frac{10}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

*b )*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**CUARTO BLOQUE**

**A.** Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + \sqrt{k}z = 3$ con **k** un número real positivo $\pi_2 \equiv 3x + 4y = -5$

a) ¿Es posible hallar **k** para que $\pi_1$ y $\pi_2$ formen un ángulo de 60º?. En caso afirmativo, calcúlalo

b) ¿Es posible hallar **k** para que $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares?. En caso afirmativo, calcúlalo

*a)*

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = \left(2, 1, \sqrt{k}\right) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (3, 4, 0) \end{cases} \Rightarrow \cos 60º = \frac{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{\pi_1}}\right|\left|\overrightarrow{v_{\pi_2}}\right|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\left|\left(2, 1, \sqrt{k}\right)\cdot(3, 4, 0)\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + \left(\sqrt{k}\right)^2}\sqrt{\left(3^2 + 4^2 + 0^2\right)}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|6+4|}{\sqrt{5+k}\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{5\sqrt{5+k}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5+k}} \Rightarrow \sqrt{5+k} = 4 \Rightarrow 5 + k = 16 \Rightarrow k = 11$$

b) Si los planos son perpendiculares sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = \left(2, 1, \sqrt{k}\right) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (3, 4, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \left(2, 1, \sqrt{k}\right)\cdot(3, 4, 0) = 6 + 4 + 0 = 10 \neq 0 \Rightarrow$$

*No son perpendiculares ni los vectores directores ni los planos sea cual sea k*

**B**. Considera los puntos **A(1 , 2 , 1)**, **B(3 , 6 , 3)**, **C(0 , -1 , 5)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ z - y = 4 \end{cases}$

a) Halla el punto **D** de la recta **r** de forma que los puntos **A**, **B**, **C** y **D** estén en un mismo plano

b) Determina un punto **D'** de la recta r para que el volumen del tetraedro determinado por los vértices **A**, **B**, **C** y **D'** sea $\frac{10}{3}$

a) Los vectores **AB**, **AC** y **AD**, son coplanarios, uno de ellos es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nulo

$$\begin{cases} x = -1 + y \\ z = 4 + y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3\ ,6\ ,3) - (1\ ,2\ ,1) = (2\ ,4\ ,2) \equiv (1\ ,2\ ,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,-1\ ,5) - (1\ ,2\ ,1) = (-1\ ,-3\ ,4) \\ \overrightarrow{AD'} = (-1+\lambda\ ,\lambda\ ,4+\lambda) - (1\ ,2\ ,1) = (\lambda - 2\ ,\lambda - 2\ ,\lambda + 3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda - 2 & \lambda + 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$16\ (\lambda - 2) - 2\ (\lambda - 2) - 6\ (\lambda + 3) + 4\ (\lambda + 3) + 6\ (\lambda - 2) - 8\ (\lambda - 2) = 0 \Rightarrow 12\ (\lambda - 2) - 2\ (\lambda + 3) = 12\lambda - 24 - 2\lambda - 6$$

$$10\lambda - 30 = 0 \Rightarrow 10\lambda = 30 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$5\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow D \begin{cases} x = -1 + 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + 3 \end{cases} \Rightarrow D(2\ ,3\ ,7)$$

*b)*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2\ ,4\ ,2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1\ ,-3\ ,4) \\ \overrightarrow{AD'} = (-1+\lambda\ ,\lambda\ ,4+\lambda) - (1\ ,2\ ,1) = (\lambda - 2\ ,\lambda - 2\ ,\lambda + 3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AD'} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \right| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD'} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda - 2 & \lambda + 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 16\ (\lambda - 2) - 2\ (\lambda - 2) - 6\ (\lambda + 3) + 4\ (\lambda + 3) + 6\ (\lambda - 2) - 8\ (\lambda - 2) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD'} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = 12\ (\lambda - 2) - 2\ (\lambda + 3) = 12\lambda - 24 - 2\lambda - 6 = 10\lambda - 30 \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{1}{6} \cdot (10\lambda - 30) \Rightarrow$$

$$\frac{10}{3} = \frac{5\lambda - 15}{3} \Rightarrow 5\lambda - 15 = 10 \Rightarrow 5\lambda = 25 \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow D' \begin{cases} x = -1 + 5 \\ y = 5 \\ z = 4 + 5 \end{cases} \Rightarrow D'(4\ ,5\ ,9)$$