PRIMER BLOQUE

A. Un depósito cilíndrico construido sin la tapa superior tiene una capacidad de **27** π m^3. Determina cuanto miden el radio de su base y su altura sabiendo que se ha construido de forma que su superficie sea mínima

Sea el radio de la base **R** y la altura **H**

$$\begin{cases} 27\pi = \pi R^2 H \Rightarrow H = \dfrac{27\pi}{\pi R^2} = \dfrac{27}{R^2} \\ S = \pi R^2 + 2\pi RH \end{cases} \Rightarrow S = \pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{27}{R^2} = \pi R^2 + \frac{54\pi}{R} = \frac{\pi R^3 + 54\pi}{R} = \pi \frac{R^3 + 54}{R} \Rightarrow$$

$$S' = \frac{dS}{dR} = \pi \frac{3R^2 R - \left(R^3 + 54\right)}{R^2} = \pi \frac{3R^3 - R^3 - 54}{R^2} = \pi \frac{2R^3 - 54}{R^2} = 2\pi \frac{R^3 - 27}{R^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{R^3 - 27}{R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$R^3 - 27 = 0 \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow$$

$$S'' = \frac{d^2 S}{dR^2} = 2\pi \frac{3R^2 R^2 - 2R\left(R^3 - 27\right)}{R^4} = 2\pi \frac{3R^3 - 2\left(R^3 - 27\right)}{R^3} = 2\pi \frac{R^3 + 54}{R^3} \Rightarrow$$

$$S''(3) = 2\pi \frac{3^3 + 54}{3^3} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} R = 3\ m \\ H = \dfrac{27}{3^2} = 3\ m \end{cases}$$

B. Se sabe que la recta **y = 9** es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{ax^2 - 4}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \Re$. Estudia si para dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas

$$y = 9 \Rightarrow y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{ax^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopitl} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2ax} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = 9 \Rightarrow 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\dfrac{x^2}{9} - 4} = \frac{x^2}{\dfrac{x^2 - 36}{9}} = \frac{9x^2}{x^2 - 36} \Rightarrow x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(-6) = \dfrac{9 \cdot (-6)^2}{(-6)^2 - 36} = \dfrac{324}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \Rightarrow x = -6 \\ f(6) = \dfrac{9 \cdot 6^2}{6^2 - 36} = \dfrac{324}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{9x^2}{x^2 - 36}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2}{x^3 - 36x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{x^2 - 36} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopitl} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{2x} = \frac{9}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{9x^2}{x^2 - 36}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2}{x^3 - 36x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x}{x^2 - 36} = \frac{-\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopitl} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{2x} = \frac{9}{-\infty} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula las integrales: a) $\int tg\,(x)\,dx$ b) $\int \left[1+tg^2(x)\right]dx$ c) $\int arc\ tg\,(x)\,dx$

$a)$

$$\int tg\,(x)\,dx=\int\frac{(-1)}{t}\,dt=-\int\frac{dt}{t}=-ln\ t=-ln\left[cos\,(x)\right]+K$$

$$cos\,(x)=t\Rightarrow -sen\,(x)\,dx=dt\Rightarrow sen\,(x)\,dx=-dt$$

$b)$

$$1+tg^2(x)=1+\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}=\frac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)}=\frac{1}{cos^2(x)}$$

$$\int\left[1+tg^2(x)\right]dx=\int\frac{1}{cos^2(x)}\,dx=tg\,(x)+K$$

$c)$

$$I=\int arc\ tg\,(x)\,dx=x\cdot arc\ tg\,(x)-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=x\ arc\ tg\,(x)-\int\frac{1}{t}\frac{dt}{2}=x\ arc\ tg\,(x)-\frac{1}{2}\cdot ln\ t$$

$$Por\ \ partes\Rightarrow\begin{cases}u=arc\ tg\,(x)\Rightarrow du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx\\ dx=dv\Rightarrow v=\int dx=x\end{cases}\qquad 1+x^2=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$$

$$I=x\ arc\ tg\,(x)-ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}=x\ arc\ tg\,(x)-ln\sqrt{1+x^2}+K$$

B. a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3 & si\quad x<-1\\ 1-x^2 & si\quad x\geq -1\end{cases}$

b) Determina el área encerrada por la gráfica de la función **f(x)** y el eje de abcisas

$a)$

Continuidad

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=(-1)^2+4\cdot(-1)+3=1-4+3=0\\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1-(-1)^2=1-1=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=0\Rightarrow Continua\ en\ x=-1$$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases}2x+4 & si\quad x<-1\\ -2x & si\quad x>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=-2\cdot(-1)=2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^+} f'(x)=2\Rightarrow$$

$Derivable\ en\ x=-1$

$b)$

$$b)\,Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+4x+3=0\Rightarrow\Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 3=4\geq 0\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-4+2}{2}=-1\\ x=\dfrac{-4-2}{2}=-3\end{cases}\\ 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}\end{cases}$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

$$\begin{cases} f(-2) = x^2 + 4x + 3 = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 \Rightarrow Negativo \\ f(0) = 1 - 0^2 = 1 \Rightarrow Positivo \end{cases}$$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} \left(x^2 + 4x + 3\right) dx\right| + \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \int_{-3}^{-1} \left(-x^2 - 4x - 3\right) dx + [x]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$A = -\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-3}^{-1} - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-3}^{-1} - 3\cdot[x]_{-3}^{-1} + [1-(-1)] - \frac{1}{3}\cdot\left[1^3 - (-1)^3\right] =$$

$$A = -\frac{1}{3}\cdot\left[(-1)^3 - (-3)^3\right] - 2\cdot\left[(-1)^2 - (-3)^2\right] - 3\cdot[(-1)-(-3)] + 2 - \frac{2}{3} = -\frac{26}{3} - 2\cdot(-8) - 3\cdot 2 + \frac{4}{3}$$

$$A = -\frac{22}{3} + 16 - 6 = 10 - \frac{22}{3} = \frac{8}{3}\, u^2$$

TERCER BLOQUE

A. a) Sean **A**, **B** y **X** matrices cuadradas de tamaño **n**. Despeja **X** de la ecuación **X . A = 2X + B²**

b) Calcula la matriz **X** siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a)

$$XA - 2X = B^2 \Rightarrow X(A-2I) = B^2 \Rightarrow X(A-2I)(A-2I)^{-1} = B^2\,(A-2I)^{-1} \Rightarrow XI = B^2\,(A-2I)^{-1} \Rightarrow$$
$$X = B^2\,(A-2I)^{-1}$$

b) Existirá solución de **X** si existe una matriz inversa de **A – 2I,** siendo **I** la matriz identidad de orden **3**, y este carácter inverso solo se dará si el determinante de **A – 2I** no es nulo

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A-2I| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow Existe\ (A-2I)^{-1} \Rightarrow (A-2I)^{-1} = \frac{1}{|A-2I|}\cdot\left[adj\ (A-2I)^t\right] \Rightarrow$$

$$(A-2I)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ (A-2I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-2I)^{-1} = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 24 & 4 \\ 0 & 32 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 0 & -16 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

B. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \Re$, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$, si es posible.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 9 - 10 + 9 - 6\lambda - 5\lambda = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 121 - 96 = 25 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{11+5}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ \lambda = \frac{11-5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \left\{1, \frac{8}{3}\right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & -1 & 4 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & 2 & -8 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ tercera\ ecuación\ es$$

$combinación\ lineal\ de\ las\ otras\ dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

a)Continuación

$Si\ \lambda = \frac{8}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{3} & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 8 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ -40 & -24 & -24 & 0 \\ -72 & -48 & -64 & -24 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & -9 & -39 & 30 \\ 0 & -21 & -91 & 30 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 13 & -10 \\ 0 & -21 & -91 & 30 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 13 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -40 \Rightarrow z = -\frac{40}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

b)

$Si\ \lambda = 0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -15 & -10 & 0 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 9 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow 8z = -3 \Rightarrow z = -\frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$y + \frac{3}{8} = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{8} + 2 = \frac{13}{8} \Rightarrow 5x + 3 \cdot \left(\frac{13}{8}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = 0 \Rightarrow 5x + \frac{39}{8} - \frac{9}{8} = 0 \Rightarrow 5x = -\frac{30}{8} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{8}, -\frac{3}{8}\right)$$

CUARTO BLOQUE

A. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y razona tus respuestas.

1.- Dados un plano π y un punto **P** que no está contenido en π, existe un único plano perpendicular a π que pasa por **P**
2.- Dados una recta **r** y un punto **P** que no está contenido en la recta **r**, existe un único plano perpendicular a **r** que pasa por **P**

1.- Para que el plano π' sea perpendicular π tendremos que hallar una recta **s** perpendicular al plano π**,** dicha recta determina un haz de planos perpendiculares a π, por lo tanto la afirmación es **falsa** ya que son infinitos los planos perpendiculares

2.- La afirmación es **verdadera** ya que la recta **t** perpendicular a **r** trazada desde P, nos determina un solo plano π'' que contiene a las dos rectas

B. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad y \quad r' \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = a + s \end{cases} , con\ s, t \in \Re$

a) Encuentra un valor del parámetro $a \in \Re$ para que las rectas r y r' estén contenidas en un mismo plano. Halla la ecuación general de dicho plano
b) Para a = 0, calcula unas ecuaciones paramétricas de un plano π que contenga la recta r y unas ecuaciones paramétricas de otro plano π' que contenga a la recta **r'** de modo que $\pi\ y\ \pi'$ sean paralelos

a) Para que las rectas determinen un plano o son paralelas o se cortan en un punto. De ser paralelas sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no ser así se cortarán en un punto.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow No\ pueden\ ser\ paralelas \Rightarrow Se\ cortan\ en\ un\ punto\ P$$

$$\begin{cases} t = 2 + s \\ -t = s \\ 1 - t = a + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - s = 2 \\ t + s = 0 \\ t + s = 1 - a \end{cases} \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 - 1 \end{cases} \Rightarrow P(1, -1, 0)$$

Para hallar la ecuación del plano α utilizaremos los vectores directores de las rectas **r** y **r'** y el vector formado por P Y G, siendo este el punto genérico del plano que se quiere hallar.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, -1, 0) = (x - 1, y + 1, z) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x - 1) + (y + 1) + z + z - (x - 1) - (y + 1) = 0 \Rightarrow -2(x - 1) + 2z = 0 \Rightarrow (x - 1) - z = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - z - 1 = 0$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

Los vectores directores de las rectas son comunes a los dos planos diferenciadose en el punto que uno, el del plano π pertenecerá a la recta r, le llamaremos R y tomaremos el indicado en su ecuación, y el que esta contenido en π' pertenecerá a r' y lo denominaremos R' tomado de la ecuación de dicha recta.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (1\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\,(1\,,0\,,1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \\ R'(2\,,0\,,0) \Rightarrow \pi' \equiv \begin{cases} x = 2 + s + t \\ y = -s + t \\ z = s + t \end{cases} \end{cases}$$