PRIMER BLOQUE

A. Según el artículo "The desing of honeycombs" de A. L. Persellini, el área de la superficie de una celda de un panal de abejas está determinada por la función $A(\theta)= p + q\dfrac{\sqrt{3}-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ donde **p** y **q** son dos constantes reales y positivas, y $\theta \in \left(0\ ,\dfrac{\pi}{2}\right)$ un cierto ángulo. Calcula con que ángulo θ construyen las abejas las celdas de un panal sabiendo que minimizan dicha área.

$$A'(\theta)=\frac{dA}{d\theta}=q\frac{\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\theta-\cos\theta\left(\sqrt{3}-\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}=q\frac{\operatorname{sen}^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=q\frac{1-\sqrt{3}\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\Rightarrow$$

$$A'=0\Rightarrow q\frac{1-\sqrt{3}\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}=0\Rightarrow 1-\sqrt{3}\cos\theta=0\Rightarrow\sqrt{3}\cos\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$$

$$\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=54^{o}44'8''=\frac{\pi\cdot 54'735610}{180}=0{,}30408672\pi$$

$$A''(\theta)=\frac{d^2A}{d\theta^2}=q\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta-2\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\left(1-\sqrt{3}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^4\theta}=q\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta-2\cdot\cos\theta\cdot\left(1-\sqrt{3}\cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^3\theta}$$

$$A''(\theta)=q\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta-2\cdot\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}=q\frac{\sqrt{3}\left(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)-2\cdot\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}$$

$$A''(0{,}30408672\pi)=q\frac{\sqrt{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}}=q\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}}=q\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}=q\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=q\frac{3}{\sqrt{2}}>0\Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\theta=54^{o}44'8''=0{,}30408672\pi$$

B. Se sabe que la recta **x = -3** es una asíntota vertical de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-a}$. Calcula el valor del parámetro $a\in\Re$. Estudia si para dicho valor del parámetro la función **f(x)** tiene asíntotas horizontales u oblicuas

$$x-a=0\Rightarrow\begin{cases}x=a\\x=-3\end{cases}\Rightarrow a=-3\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x+3}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{AplicandoL'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty\Rightarrow \text{No existe cuando } x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+3}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{\text{AplicandoL'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1}=\frac{-\infty}{1}=-\infty\Rightarrow \text{No existe cuando } x\to-\infty$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\,(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{AplicandoL'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-3x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+3}=\frac{-\infty}{\infty}=\xrightarrow{AplicandoL'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{1}=-3$$

$$Existe\ asíntota\ oblicua,\ y=x-3,\ cuando\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\,(x+3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+3}=\frac{-\infty}{-\infty}=\xrightarrow{AplicandoL'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-3x}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x+3}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{AplicandoL'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{1}=-3\Rightarrow Existe\ asíntota\ oblicua,\ y=x-3,\ cuando\ x\to-\infty$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Enuncia la fórmula de integración por partes. Aplícala para hallar $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)ln\ x\ dx$

$$\int u\ dv=u\cdot v-\int v\ du$$

$$I=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)ln\ x\ dx=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot ln\ x-\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dx}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot ln\ x-\int dx-\int\frac{dx}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot ln\ x-x-\int x^{-2}dx$$

$$\begin{cases} u=ln\ x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}\\ \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=dv\Rightarrow v=\int dx-\int x^{-2}dx=x-\dfrac{1}{(-1)}x^{-1}=x+\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$I=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot ln\ x-x-\frac{1}{(-1)}x^{-1}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot ln\ x-x+\frac{1}{x}+K$$

B. Determina una función $f:\Re\to\Re$ sabiendo que cumple que **f'''(x) = 3e^{x} + 2**, **f''(0) = 2**, **f'(0) = 3** y **f(1) = 3 (e + 1)**

$$f''(x)=\int\left(3e^{x}+2\right)dx=3e^{x}+2x+K\Rightarrow f''(0)=2\Rightarrow 3e^{0}+2\cdot 0+K=2\Rightarrow 3+K=2\Rightarrow K=-1$$

$$f'(x)=\int\left(3e^{x}+2x-1\right)dx=3e^{x}+2\cdot\frac{1}{2}x^{2}-x+R\Rightarrow f'(x)=3\Rightarrow 3e^{0}+0^{2}-0+R=3\Rightarrow 3+R=3\Rightarrow R=0$$

$$f(x)=\int\left(3e^{x}+x^{2}-x\right)dx=3e^{x}+\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{2}x^{2}+Q\Rightarrow f(1)=3\left(e+1\right)\Rightarrow 3e^{1}+\frac{1}{3}\cdot 1^{3}-\frac{1}{2}\cdot 1^{2}+Q=3\left(e+1\right)\Rightarrow$$

$$3e+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+Q=3e+3\Rightarrow Q=3e+3-3e-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=3-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{18-2+3}{6}=\frac{19}{6}\Rightarrow$$

$$f(x)=3e^{x}+\frac{1}{3}x^{3}-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{19}{6}$$

TERCER BLOQUE

A. Determina en función del parámetro $a\in\Re$, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&-1&a&2\\1&-a&a&a\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\2&-1&a&2\\1&-a&a&a\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-5&a&4\\0&-a-2&a&a+1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-5&a&4\\0&-a-2+5&0&a+1-4\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&-5&a&4\\0&-a+3&0&a-3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-a+3=0\\a-3=0\end{cases}\Rightarrow Cuando\ a=3\Rightarrow rang(A)=2$$

$$\forall a\in\Re-\{3\}\Rightarrow rang(A)=3$$

B.- a) Clasifica en función del parámetro $k \in \Re$ el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x+y-z=k \\ y+z=-2 \end{cases}$

b) Resuélvelo cuando sea compatible determinado

a) Para que sea compatible una, al menos, de las ecuaciones tiene que ser combinación lineal de las demás. Por lo tanto el determinante que forman los coeficientes y los términos independientes tiene que ser nulo

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & k-3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -5 & -4 & k-3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & k-3-10 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A/B| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 1 & k-13 \end{vmatrix} = 4(k-13)+8 = 4k-52+8 = 4k-44 \Rightarrow 4k-44=0 \Rightarrow 4k=44 \Rightarrow k=11$$

$$Cuando\ k=11 \Rightarrow El\ sistema\ es\ Compatible \Rightarrow Veamos, ahora, si\ es\ Deter\min ado\ o\ In\det er\min ado$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & -8 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & 24 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 3 = Número\ de\ incognitas$$

$$Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow 3z=-6 \Rightarrow z=-\frac{6}{3}=-2 \Rightarrow -5y+3\cdot(-2)=-6 \Rightarrow -5y-6=-6 \Rightarrow -5y=0 \Rightarrow$$

$$y=0 \Rightarrow x+2\cdot 0-2=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x, y, z) = (3, 0, -2)$$

CUARTO BLOQUE

A. Consideremos los planos $\pi_1 \equiv x-2y+z=0 \quad y \quad \pi_2 \equiv 2x+ay+bz=24$ la posición relativa de los planos:

a) Calcula $a, b \in \Re$ para que los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ sean paralelos.¿Son coincidentes en algún caso?

b) Calcula la ecuación general de un plano π_3 que equidista de $\pi_1\ y\ \pi_2$ para los valores de **a** y **b** antes obtenidos

a) Si los planos son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales, serán coincidentes cuando tengan, ademas igual o prporcional el valor independiente

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1, -2, 1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (2, a, b) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{a} = \frac{1}{b} = \frac{0}{24} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{a} \Rightarrow a=-4 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{b} \Rightarrow b=2 \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{0}{24} \Rightarrow$$

$$No\ son\ coincidentes, son\ paralelos$$

Continuación del Problema B de Cuarto Bloque

b) Es un plano π_3 cuya distancia a π_1 y π_2 es la misma siendo paralelos a ellos

La ecuación general del plano es $\pi_1 \equiv 2x-4y+2z+D=0$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x-4y+2z=0 \\ \pi_2 \equiv 2x-4y+2z-24=0 \end{cases} \Rightarrow d(\pi_1\ ,\ \pi_3)=d(\pi_2\ ,\ \pi_3) \Rightarrow \frac{|D-0|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}=\frac{|D-(-24)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}} \Rightarrow$$

$$D=\pm(D+24) \Rightarrow \begin{cases} D=D+24 \Rightarrow 0 \neq 24 \Rightarrow \text{Sin solución} \\ D=-D-24 \Rightarrow 2D=-24 \Rightarrow D=-12 \end{cases} \Rightarrow \pi_3 \equiv 2x-4y+2z-12=0$$

B. Dado el punto **P(0 , -1 , 0)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+t, t \in \Re \\ z=-t \end{cases}$

b) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta **r’** contenida en dicho plano, que sea perpendicular a **r** y que pase por el punto **P(1 , 0 , 0)**

a) Para hallar el plano π tomaremos el vector director de la recta **r**, el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el punto **O** y el vector formado por **O** y **G**, siendo este punto el generador del plano.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **OG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} x=1-z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1\ ,-1\ ,1) \\ R(1\ ,0\ ,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{OR}=(1\ ,0\ ,0)-(0\ ,0\ ,0)=(1\ ,0\ ,0) \\ \overrightarrow{OG}=(x\ ,y\ ,z)-(0\ ,0\ ,0)=(x\ ,y\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi \equiv y+z=0$$

b) La recta **r’** buscada esta situada en el mismo plano y es perpendicular a la recta **r** y al vector director del plano π por ello el producto vectorial de ambos es el vector director buscado

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1\ ,-1\ ,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(0\ ,1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r'}}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_\pi}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{k}-\vec{i}+\vec{j}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r'}}=(-2\ ,1\ ,-1) \Rightarrow$$

$$r'=\begin{cases} x=1-2\mu \\ y=\mu \\ z=-\mu \end{cases}$$