Propuesta A

1A.- a) Enuncia el teorema de Bolzano **(0'5 puntos)**

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? **(1 punto)**

c) Demuestra que la función **f(x)** anterior **y** $g(x)=2x-1$ se cortan al menos en un punto **(1 punto)**

a) **<u>Teorema de Bolzano</u>**

Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) ≠ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f(c) = 0**

$$b)$$

$$1+x^2=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow \textit{Solución imaginaria}\Rightarrow \textit{No hay solución en }\Re$$

$$Dom\,(f)=\forall x\in\Re\Rightarrow \textit{Por lo tanto es continua en toda la recta real}\Rightarrow$$

$$\textit{No hay intervalos }[a\ ,b]\textit{ en el que el sign }f(a)\neq \textit{sign }f(b)\textit{ ya que el sign }f(x)\textit{ es siempre positivo}\Rightarrow$$

$$\textit{No cumple el teorema de Bolzano}$$

$$c)$$

$$\frac{1}{1+x^2}=2x-1\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}-(2x-1)=0\Rightarrow h(x)=\frac{1}{1+x^2}-(2x-1)\Rightarrow \textit{Es continua en toda la recta real}$$

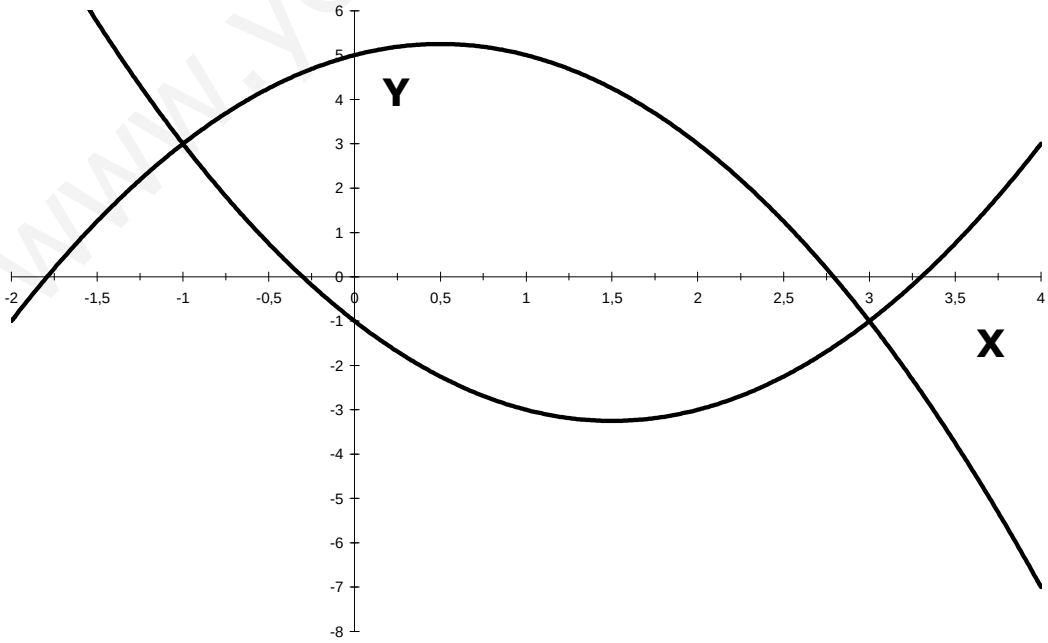
$$\textit{Cojamos el intervalo }[0\ ,1]\Rightarrow\begin{cases} f(0)=\dfrac{1}{1+0^2}-(2\cdot 0-1)=1-0+1=2\Rightarrow \textit{sign }f(0)=+\\ f(1)=\dfrac{1}{1+1^2}-(2\cdot 1-1)=\dfrac{1}{2}-2+1=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \textit{sign }f(1)=-\end{cases}\Rightarrow$$

$$\textit{Como }[\textit{sign }f(0)\neq \textit{sign }f(1)],\textit{ según el teorema de Bolzano hay, al menos, un punto }c\in(0\ ,1)\textit{ tal que}$$

$$h(c)=0\Rightarrow\frac{1}{1+c^2}-(2c-1)=0\Rightarrow\frac{1}{1+c^2}=(2c-1)\Rightarrow c\textit{ es el punto de corte}$$

2A.- a) Representar gráficamente las parábolas $f(x)=x^2-3x+1$ y $g(x)=-x^2+x+5$ **(0'5 puntos)**

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas **(2 puntos)**



www.yoquieroaprobar.es

Continuación del Problema 2A

$$Puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-1=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=13\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ -x^2+x+5=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot 5=21\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$Punto\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2-3x-1=-x^2+x+5 \Rightarrow 2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

$$A=\int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}\left(-x^2+x+5\right)dx-\int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}\left(x^2-3x-1\right)dx+\int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}\left(-x^2+x+5\right)dx+\left|\int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}\left(x^2-3x-1\right)dx\right|+\left|\int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^{3}\left(x^2-3x-1\right)dx\right|-$$

$$-\left|\int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^{3}\left(-x^2+x+5\right)dx\right|=\int_{-1}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}\left(-x^2+x+5\right)dx-\int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}\left(x^2-3x-1\right)dx-\int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}\left(x^2-3x-1\right)dx-\int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^{3}\left(x^2-3x-1\right)dx+$$

$$+\int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^{3}\left(-x^2+x+5\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+x+5\right)dx-\int_{-1}^{3}\left(x^2-3x-1\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-2x^2+4x+6\right)dx=$$

$$A=-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{3}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{3}+6\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{3}=-\frac{2}{3}\cdot\left[3^3-(-1)^3\right]+2\cdot\left[3^2-(-1)^2\right]+6\cdot[3-(-1)]$$

$$A=-\frac{2}{3}\cdot[27-(-1)]+2\cdot[9-1]+6\cdot(3+1)=-\frac{2}{3}\cdot(27+1)+16+24=40-\frac{56}{3}=\frac{64}{3}$$

3A.- a) Clasifica en función del parámetro $k\in\Re$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx+y+z=k \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k \end{cases}$ **(1'5 puntos)**

b) Resuélvelo, si es posible, para **k = 1 (1 punto)**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=k^3+1+1-k-k-k=k^3-3k+2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow k^3-3k+2=0 \Rightarrow Por\ Ruffini$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow k^3-3k+2=0 \Rightarrow (k-1)^2(k+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k+2=0 \Rightarrow k=-2 \end{cases}$$

$$\forall k\in\Re-\{-2,1\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

www.yoquieroaprobar.es

Continuación del Problema 3A

$a)$ *Continuación*

$Si\ k=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 2 & -4 & 2 & -4\\ 2 & 2 & -4 & -4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -4\\ 0 & 3 & -3 & -4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{array}\right)\Rightarrow 0z=-8\Rightarrow$$

$$z=-\frac{8}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow Las\ ecuaciones\ segunda\ y\ tercera\ son\ combinación\ lineal\ de\ la\ primera\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$b)$

$Si\ k=1\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow x+y+z=1\Rightarrow x=1-y-z\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,y\ ,z)=(1-\lambda-\mu\ ,\lambda\ ,\mu)$$

4A.- a) Estudia la posición relativa de la recta $r\equiv\begin{cases}x=-\lambda\\ y=0\\ z=1+\lambda\end{cases}\ ,\lambda\in\Re$ y el plano de ecuación general $\pi\equiv 2x-y+3z=6$ **(1'5 puntos)**

b) Encuentra la ecuación general de plano π' perpendicular a π que contenga **r (1 punto)**

a) Si son paralelos o la recta esta contenida en el plano, sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo, de serlo habrá que analizar si algún punto **R** de la recta (tomaremos el indicado a su ecuación) pertenece al plano y la recta esta contenida en el plano, de no darse esta circunstancia la recta es paralela.

Si el producto escalar es distinto de cero la recta y el plano se cortan en un punto

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(2\ ,-1\ ,3)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1\ ,0\ ,1)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=(2\ ,-1\ ,3)\cdot(-1\ ,0\ ,1)=-2+0+3=1\neq 0\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\not\perp\overrightarrow{v_r}\Rightarrow El\ plano\ y\ la\ recta$$

$se\ cortan\ en\ un\ punto$

www.yoquieroaprobar.es

Continuación del Problema 4A

b) Para encontrar la ecuación general del plano π' contamos con el vector director de la recta r que va a contener, el vector director del plano π que es perpendicular a ese plano y el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado a su ecuación) y el punto **G**, genérico o generador del plano que queremos hallar

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$Siendo\ R(0,0,1)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2,-1,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{RG} = (x,y,z).-(0,0,1) = (x,y,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x-3y-(z-1)-2y=0 \Rightarrow$$

$$-x-5y-(z-1)=0 \Rightarrow \pi' \equiv x+5y+z-1=0$$

www.yoquieroaprobar.es

Propuesta B

1B.- La velocidad de una partícula, medida en **m/seg** está determinada en función del tiempo $t \geq 0$ medido en segundos, por la expresión **v(t) = (t^2 + 2t) e^{-t}**. Se pide

a) ¿En que instante de tiempo de intervalo **[0 , 3]** se alcanza la velocidad máxima? **(1'25 puntos)**

b) Calcula $\lim_{t\to\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido **(1'25 puntos)**

$a)$

$$v'(t) = (2t+2)\,e^{-t} + (-1)\,e^{-t}\left(t^2+2t\right) = (2t+2)\,e^{-t} - e^{-t}\left(t^2+2t\right) = \left(2t+2-t^2-2t\right)\,e^{-t} = \left(2-t^2\right)\,e^{-t} \Rightarrow$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow \left(2-t^2\right)\,e^{-t} = 0 \Rightarrow 2-t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \in [0\,,3] \Rightarrow No\ es\ solución \end{cases}$$

$$v'(t) = \left(2-t^2\right)\,e^{-t} = -2t\,e^{-t} + (-1)\,e^{-t}\left(2-t^2\right) = e^{-t}\left(-2t-2+t^2\right) \Rightarrow v'\left(\sqrt{2}\right) = e^{-\sqrt{2}}\left[-2\sqrt{2}-2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]$$

$$v'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{-2\sqrt{2}-2+2}{e^{\sqrt{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow t = \sqrt{2}\ seg$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty} v'(t) = \lim_{x\to\infty} e^{-t}\left(t^2+2t\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{t^2+2t}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty} \frac{2t+2}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^t} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

A medida que el tiempo aumenta la velocidad va disminuyendo, siendo **y = 0** una asíntota horizontal de la función cuando el tiempo tiende a infinito

2B.- Calcula la integral indefinida: $\int \frac{cos\ x}{1+sen^2 x}\,dx$ (Nota: Puedes probar el cambio de variable **y = sen x**) **(2'5 puntos)**

$$\int \frac{cos\ x}{1+sen^2 x}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} = arc\ tg\ y = arc\ tg\ (sen\ x) + K$$

$$y = sen\ x \Rightarrow dy = cos\ x\ dx$$

www.yoquieroaprobar.es

3B.- Consideremos las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a,b,c \in \Re$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que **A . B = B . A (2'5 puntos)**

$$\begin{cases} |B|=8 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{vmatrix}=8 \Rightarrow 2c+(b+2)(a-3)=8 \Rightarrow ab+2a-3b-6+2c=8 \\ A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+b+2 & 2(a-3)+c \\ b+2 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2+a-3 \\ 2b+4 & b+2+c \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab+2a-3b+2c=14 \\ b+6=4 \Rightarrow b=-2 \\ 2a-6+c=a-1 \\ b+2=2b+4 \Rightarrow b=-2 \\ c=c+b+2 \Rightarrow b+2=0 \Rightarrow b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+2a-3\cdot(-2)+2c=14 \Rightarrow 6+2c=14 \Rightarrow 2c=8 \Rightarrow c=4 \\ a+c=5 \end{cases} \Rightarrow a+4=5 \Rightarrow a=1$$

$$Solución \Rightarrow (a\,,b\,,c)=(1\,,-2\,,4)$$

4.B.- Dado el plano $\pi \equiv x+z=4$ y el punto **P(1 , 1 , 0)**, se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por **P (1'25 puntos)**

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por **P (1'25 puntos)**

a)

La ecuación de π' *es de la forma* $x+z=D \Rightarrow$ *como tiene que pasar por* $P \Rightarrow 1+0=D$ *,siendo la ecuación general* $\Rightarrow \pi' \equiv x+z-1=0$

b) El vector director de la recta r es el mismo que el del plano, por lo tanto

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,0\,,1) \Rightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es