

Propuesta A**1A.- a) Enuncia el teorema de Bolzano (0'5 puntos)**b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? **(1 punto)**c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan al menos en un punto **(1 punto)****a) Teorema de Bolzano**

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [**sign** $f(a) \neq \text{sign } f(b)$], entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **$f(c) = 0$**

b)

$$1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Solución imaginaria} \Rightarrow \text{No hay solución en } \mathbb{R}$$

$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Por lo tanto es continua en toda la recta real} \Rightarrow$

No hay intervalos $[a, b]$ en el que el **sign** $f(a) \neq \text{sign } f(b)$ ya que el **sign** $f(x)$ es siempre positivo $\Rightarrow$
No cumple el teorema de Bolzano

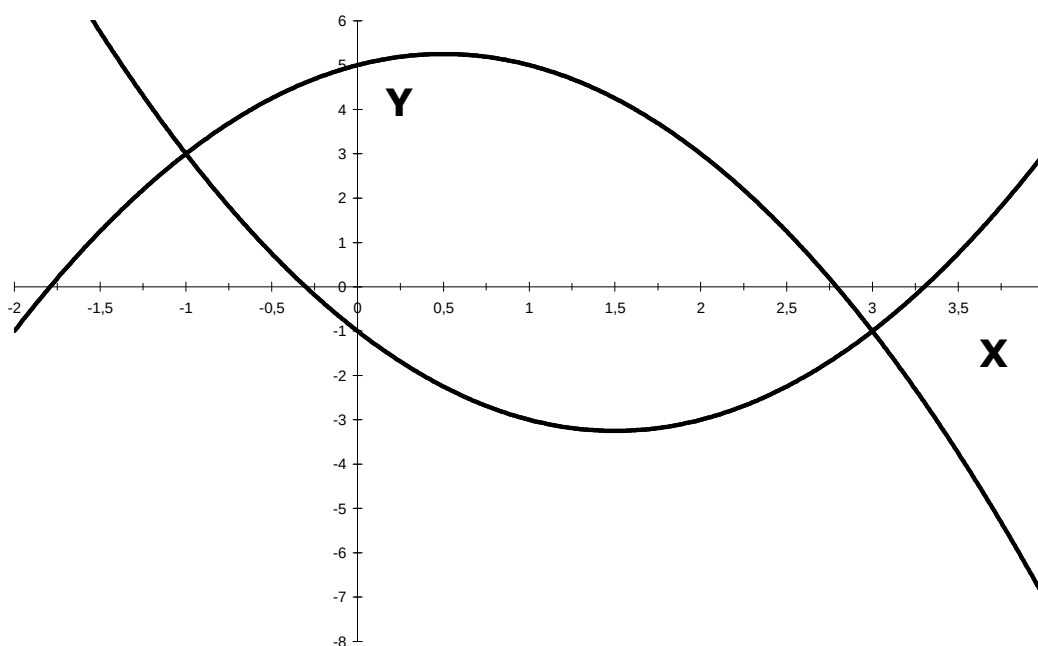
c)

$$\frac{1}{1+x^2} = 2x - 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} - (2x - 1) = 0 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{1+x^2} - (2x - 1) \Rightarrow \text{Es continua en toda la recta real}$$

$$\text{Cojamos el intervalo } [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{1}{1+0^2} - (2 \cdot 0 - 1) = 1 - 0 + 1 = 2 \Rightarrow \text{sign } f(0) = + \\ f(1) = \frac{1}{1+1^2} - (2 \cdot 1 - 1) = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{sign } f(1) = - \end{cases} \Rightarrow$$

Como [**sign** $f(0) \neq \text{sign } f(1)$], según el teorema de Bolzano hay, al menos, un punto $c \in (0, 1)$ tal que

$$h(c) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} - (2c - 1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+c^2} = (2c - 1) \Rightarrow c \text{ es el punto de corte}$$

2A.- a) Representar gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$ (0'5 puntos)b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas **(2 puntos)**

Continuación del Problema 2A

$$Puntos de corte con el eje OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 13 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ -x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5 = 21 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{-2} = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$Punto de corte entre funciones \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = -x^2 + x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (-x^2 + x + 5) dx - \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (x^2 - 3x - 1) dx + \int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} (-x^2 + x + 5) dx + \left| \int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} (x^2 - 3x - 1) dx \right| + \left| \int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^3 (x^2 - 3x - 1) dx \right| - \\ &- \left| \int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^3 (-x^2 + x + 5) dx \right| = \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (-x^2 + x + 5) dx - \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (x^2 - 3x - 1) dx - \int_{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} (x^2 - 3x - 1) dx - \int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^3 (x^2 - 3x - 1) dx + \\ &+ \int_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}^3 (-x^2 + x + 5) dx = \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (-x^2 + x + 5) dx - \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (x^2 - 3x - 1) dx = \int_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} (-2x^2 + 4x + 6) dx = \\ A &= -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} + 6 \cdot [x]_{-1}^{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot [3^3 - (-1)^3] + 2 \cdot [3^2 - (-1)^2] + 6 \cdot [3 - (-1)] \\ A &= -\frac{2}{3} \cdot [27 - (-1)] + 2 \cdot [9 - 1] + 6 \cdot (3 + 1) = -\frac{2}{3} \cdot (27 + 1) + 16 + 24 = 40 - \frac{56}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

3A.- a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathfrak{R}$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$ **(1'5 puntos)**

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$ **(1 punto)**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -2 & & \\ & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array} \Rightarrow k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow (k-1)^2(k+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k+2=0 \Rightarrow k=-2 \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathfrak{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$$

Continuación del Problema 3Aa) *Continuación*Si $k = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -8 \Rightarrow$$

$$z = -\frac{8}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Las ecuaciones segunda y tercera son combinación lineal de la primera} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $k = 1 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$$

$$4A.- a) \text{ Estudia la posición relativa de la recta } r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ y el plano de ecuación general}$$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z = 6 \text{ (1'5 puntos)}$$

b) Encuentra la ecuación general de plano π' perpendicular a π que contenga r (1 punto)

a) Si son paralelos o la recta esta contenida en el plano, sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo, de serlo habrá que analizar si algún punto R de la recta (tomaremos el indicado a su ecuación) pertenece al plano y la recta esta contenida en el plano, de no darse esta circunstancia la recta es paralela.

Si el producto escalar es distinto de cero la recta y el plano se cortan en un punto

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (2, -1, 3) \\ \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (2, -1, 3) \cdot (-1, 0, 1) = -2 + 0 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow \text{El plano y la recta}$$

se cortan en un punto

Continuación del Problema 4A

b) Para encontrar la ecuación general del plano π' contamos con el vector director de la recta r que va a contener, el vector director del plano π que es perpendicular a ese plano y el vector formado por un punto $\mathbf{R}$ cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado a su ecuación) y el punto $\mathbf{G}$, genérico o generador del plano que queremos hallar

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\mathbf{RG}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

Siendo $R(0, 0, 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{\pi} = (2, -1, 3) \\ \vec{v}_r = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z - 1) \end{array} \right. \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - 3y - (z-1) - 2y = 0 \Rightarrow$$

$$-x - 5y - (z-1) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 5y + z - 1 = 0$$

Propuesta B

1B.- La velocidad de una partícula, medida en **m/seg** está determinada en función del tiempo $t \geq 0$ medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t) e^{-t}$. Se pide

a) ¿En que instante de tiempo de intervalo **[0, 3]** se alcanza la velocidad máxima? **(1'25 puntos)**

b) Calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido **(1'25 puntos)**

a)

$$v'(t) = (2t + 2) e^{-t} + (-1) e^{-t} (t^2 + 2t) = (2t + 2) e^{-t} - e^{-t} (t^2 + 2t) = (2t + 2 - t^2 - 2t) e^{-t} = (2 - t^2) e^{-t} \Rightarrow$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow (2 - t^2) e^{-t} = 0 \Rightarrow 2 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \in [0, 3] \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

$$v'(t) = (2 - t^2) e^{-t} = -2t e^{-t} + (-1) e^{-t} (2 - t^2) = e^{-t} (-2t - 2 + t^2) \Rightarrow v'(\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}} [-2\sqrt{2} - 2 + (\sqrt{2})^2]$$

$$v'(\sqrt{2}) = \frac{-2\sqrt{2} - 2 + 2}{e^{\sqrt{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow t = \sqrt{2} \text{ seg}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v'(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-t} (t^2 + 2t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2t + 2}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

A medida que el tiempo aumenta la velocidad va disminuyendo, siendo **y = 0** una asíntota horizontal de la función cuando el tiempo tiende a infinito

2B.- Calcula la integral indefinida: $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ (Nota: Puedes probar el cambio de variable **y = sen x**)

(2'5 puntos)

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \text{arc tg } y = \text{arc tg } (\sin x) + K$$

$$y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x dx$$

3B.- Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$

de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que

$A \cdot B = B \cdot A$ (2'5 puntos)

$$\left\{ \begin{array}{l} |B|=8 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow 2c + (b+2)(a-3) = 8 \Rightarrow ab + 2a - 3b - 6 + 2c = 8 \\ A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+b+2 & 2(a-3)+c \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2+a-3 \\ 2b+4 & b+2+c \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} ab + 2a - 3b + 2c = 14 \\ b + 6 = 4 \Rightarrow b = -2 \\ 2a - 6 + c = a - 1 \\ b + 2 = 2b + 4 \Rightarrow b = -2 \\ c = c + b + 2 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 2a - 3 \cdot (-2) + 2c = 14 \Rightarrow 6 + 2c = 14 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4 \\ a + c = 5 \end{cases} \Rightarrow a + 4 = 5 \Rightarrow a = 1 \end{array} \right.$$

Solución $\Rightarrow (a, b, c) = (1, -2, 4)$

4.B.- Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P (1'25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P (1'25 puntos)

a)

La ecuación de π' es de la forma $x + z = D \Rightarrow$ como tiene que pasar por $P \Rightarrow 1 + 0 = D$, siendo la ecuación general $\Rightarrow \pi' \equiv x + z - 1 = 0$

b) El vector director de la recta r es el mismo que el del plano, por lo tanto

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 0, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$