Propuesta A

1A.- Dada la función $f(x) = arc\ tg\left(\sqrt{x-1}\right)$ definida para $x \geq 1$, se pide:

a) Calcula y simplifica **f'(x) (1'5 puntos)**
b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la grafica de la función **f(x)** la recta tangente es horizontal. **(1 punto)**

$a)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

b)
Veamos si hay algún valor que anule a la derivada ya que la pendiente horizontal es cero
$a)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow No\ tiene\ solución \Rightarrow No\ hay\ punto\ a\lg uno\ en\ donde\ la\ recta\ tan gente$$

$sea\ horizontal$

2A.- Calcula $a \in \Re$, siendo **a > 0**, para que el área de la región limitada por la gráfica de la función **f(x) = 6x²**, el eje de abcisas y la recta **x = a** sea igual a 2000 u² **(2'5 puntos)**

$$Puntos\ de\ corte\ de\ la\ función\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\int_0^a 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^a = 2000 \Rightarrow 2 \cdot \left(a^3 - 0^3\right) = 2000 \Rightarrow a^3 = 1000 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1000} = 10$$

3A.- Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudia para que valores de $\lambda \in \Re$ el rango de la matriz **M - λN** es igual a **3 (1'25 puntos)**
b) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3X + Y = M \\ X + Y = N \end{cases}$, donde X e Y son matrices cuadradas de orden **3** **(1'25 puntos)**

$a)$

$$M - \lambda N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \left|M - \lambda N\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\left|M - \lambda N\right| = 2 \cdot (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 4\lambda(3-\lambda) + 8\lambda = (3-\lambda) \cdot (2 - 2\lambda - 4\lambda) + 8\lambda = (3-\lambda) \cdot (2 - 6\lambda) + 8\lambda$$

$$\left|M - \lambda N\right| = 6 - 18\lambda - 2\lambda + 6\lambda^2 + 8\lambda = 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 \Rightarrow Si\ \left|M - \lambda N\right| = 0 \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{1\} \Rightarrow \left|M - \lambda N\right| \neq 0 \Rightarrow rang(M - \lambda N) = 3$$

Continuación del Problema 3A

b)

$$\begin{cases} 3X + Y = M \\ -X - Y = -N \end{cases} \Rightarrow 2X = M - N = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3X + Y = M \\ -3X - 3Y = (-3) \cdot N \end{cases} \Rightarrow -2Y = M - 3N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4A.- Dado el plano $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$ se pide:

a) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \Re$ de modo que el plano π sea paralelo al plano de ecuación $\pi' \equiv x + y + z = 2$ **(1'25 puntos)**

b) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \Re$ de modo que el plano π sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$ **(1'25 puntos)**

a) Para ser paralelos, los planos, se cumplirá que sus vectores directores son iguales o proporcionales.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, a, -1) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow No\ pueden\ ser, nunca, paralelos$$

a) Para ser paralelos, el plano y la recta, se cumplirá que sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, a, -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (2, a, -1) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \Rightarrow -2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Propuesta B

1B.- Determinar los parámetros $a,b,c \in \Re$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas **(3 , 10)** y tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas **(1 , -2)**
(2’5 puntos)

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 10 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 10 \Rightarrow 9a + 3b + c = 10 \\ f(1) = -2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -2 \Rightarrow a + b + c = -2 \quad \Rightarrow \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & -1 & -10 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 8 & -28 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 8 & -28 \\ 0 & -6 & -12 & 24 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 8 & -28 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow -4c = -4 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$$

$$6b + 8 \cdot 1 = -28 \Rightarrow 6b + 8 = -28 \Rightarrow 6b = -36 \Rightarrow b = -\frac{36}{6} = -6 \Rightarrow a - 6 + 1 = -2 \Rightarrow a - 5 = -2 \Rightarrow a = 3$$

$$Solución \Rightarrow (a\ ,b\ ,c) = (3\ ,-6\ ,1) \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

2.B.- Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\, dx$ (Nota: Puedes probar el cambio de variable **y = x+1**)

(2’5 puntos)

Considero mas interesante el cambio de variable **$x + 1 = t^2$**

$$I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{t^2+1}{t}\, 2t\ dt = 2\int (t^2+1)\, dt = 2 \cdot \left(\frac{t^3}{3} + t\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} + \sqrt{x+1}\right) = 2\sqrt{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3} + 1\right)$$

$$x + 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt \Rightarrow x + 2 = t^2 + 1$$

$$I = \frac{2\,(x+4)\sqrt{x+1}}{3} + K$$

3B.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$, obtén el valor de los siguientes determinantes:

$$a)\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (0'75\ puntos) \qquad b)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad (0'75\ puntos) \qquad c)\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad (1\ punto)$$

$a)$

$$3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$$

$b)$

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 = 50$$

Continuación del Problema 3B

c)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 0 = 50 + 0 = 50$$

4B.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -2\mu \\ z = 4 + \mu \end{cases}, \mu \in \Re$, se pide:

a) Comprueba que dichas rectas se cortan en un punto calculando dicho punto de corte **(1'5 puntos)**
b) Determine el ángulo de corte entre ambas rectas **(1 punto)**

a)

$$\begin{cases} 2 - \lambda = 2 + \mu \\ 2\lambda = -2\mu \\ 2 + \lambda = 4 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow \text{Se cortan en } P \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow 1 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \text{Punto de corte } P \begin{cases} x = 2 - 1 \\ y = 2 \cdot 1 \\ z = 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow P(1, 2, 3)$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_{r'}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{r'}}\right|} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{v_{r'}} = (1, -2, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|(-1, 2, 1) \cdot (1, -2, 1)\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1 - 4 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{|-4|}{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48^{o}\,11'\,23''$$