

Propuesta A

1. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular la matriz $M = (3 \cdot I + A \cdot B)$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

b) Calcular la matriz X tal que $X \cdot C = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 puntos)

2. Se tienen tres paquetes de café con la siguiente composición:

Paquete A: 10 g de café de Colombia, 20 g de café de Brasil y 70 g de café de Kenia.

Paquete B: 40 g de café de Colombia, 30 g de café de Brasil y 30 g de café de Kenia.

Paquete C: 20 g de café de Colombia, 20 g de café de Brasil y 60 g de café de Kenia.

Se quiere saber la cantidad de cada paquete que se ha de tomar para obtener otro paquete que contenga 20 g de café de Colombia, 22 g de café de Brasil y 58 g de café de Kenia.

a) Plantea el sistema correspondiente para poder obtener la composición pedida. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado. (0.5 puntos)

3. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$

a) Calcula los valores de las constantes a y b , sabiendo que la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 0$, y un mínimo relativo en $x = 2$. (0.75 puntos)

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcula el punto de inflexión de la función f . (0.75 puntos)

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (-x-3)^2 & \text{si } x \leq -2 \\ t & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Se pide:

a) Hallar el valor de t para que f sea continua en $x = 2$. (0.5 puntos)

b) Para $t = 1$, representa gráficamente la función f . (1 punto)

5. En un cierto banco el 10 % de los créditos concedidos son para la compra de un coche. De los créditos concedidos para la compra de un coche, el 25 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de un coche, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para un coche? (0.75 puntos)

6. Un fabricante de un determinado modelo de impresoras sabe que la duración de este producto sigue una distribución normal con desviación típica 6 meses. Se hizo un estudio de mercado y se observó que la duración media de 50 impresoras elegidas aleatoriamente fue de 40 meses. Se pide:

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para la duración media de este tipo de impresoras. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

$$a) 3I + A \cdot B = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot C = I \Rightarrow X = C^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & -1/5 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hemos multiplicado el inverso} \\ \text{del determinante de C} \\ \text{por la transpuesta de adjuntos} \end{array} \right.$$

A2.- Solución:

Llamaremos x al número de gramos que cogemos del paquete A; como el paquete tiene 100 g y 10 son de Colombia, en esos x gramos llevaremos x·10% de café de Colombia, x·20% de café de Brasil y x·70% de Kenia. De forma análoga podemos razonar con las cantidades y y z que cogemos de los paquetes B y C respectivamente.

$$\begin{cases} x10\% + y40\% + z20\% = 20 \\ x20\% + y30\% + z20\% = 22 \\ x70\% + y30\% + z60\% = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 40y + 20z = 2000 \\ 20x + 30y + 20z = 2200 \\ 70x + 30y + 60z = 5800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y + 2z = 200 \\ 2x + 3y + 2z = 220 \\ 7x + 3y + 6z = 580 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ 4x - 9y = -20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 20 + y \\ 4(20 + y) - 9y = -20 \Rightarrow -5y = -100 \Rightarrow y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 40 \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ x + 4y + 2z = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{cases}$$

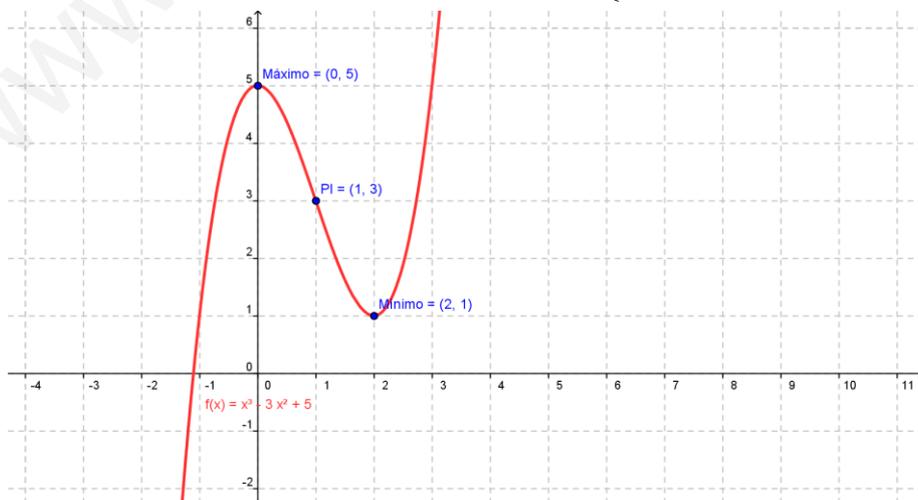
A3.- Solución:

Tendremos en cuenta que por ser derivable, la derivada se anula en los máximos y mínimos

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + b = 0 \\ 12 + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

Donde se anule la derivada segunda y no la tercera hay un punto de inflexión

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f'''(x) = 6 \\ f'''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow P.I.en(1, f(1)) = (1, 3)$$

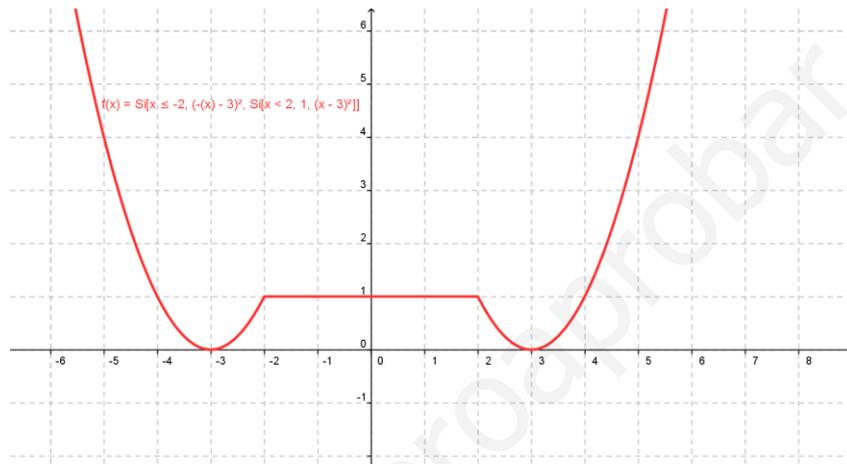


A4.- Solución:

a) Para ser continua en a tiene que estar definida en a , tener límite y que el límite coincida con el valor $f(a)$

$$\begin{cases} f(2) = t \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = t \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \text{para } f(x) \\ \text{continua en } x = 2 \end{cases} ; f(x) = \begin{cases} (-x-3)^2 = (x+3)^2 \text{ en } (-\infty, -2] \\ 1 \text{ en } (-2, 2] \\ (x-3)^2 \text{ en } (2, +\infty) \end{cases}$$

El primer trozo es la parábola x^2 desplazada 3 a la izquierda. El segundo constante 1 el tercero x^2 desplazada 3 a la derecha



A5.- Solución:

Llamemos Cc = compra de coche, NCc =no compra de coche, I =impagado:

$$P(Cc) = 10\% \Rightarrow P(NCc) = 90\% ; P(I/Cc) = 25\% ; P(I/NCc) = 10\%$$

$$\begin{aligned} P(I) &= P((Cc \cap I) \cup (NCc \cap I)) = P(Cc \cap I) + P(NCc \cap I) = P(Cc) \cdot P(I/Cc) + P(NCc) \cdot P(I/NCc) = \\ &= 10\% \cdot 25\% + 90\% \cdot 10\% = 11,5\% \end{aligned}$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). } \bar{x} \text{ la}$$

media de la muestra, ahora 40 meses; σ la desviación típica, ahora 6 meses; n el tamaño de la muestra, 50.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975) . \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(40 - 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{50}}, 40 + 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{50}}\right) = (38,44, 41,66)$$

b) Observamos que n , el tamaño de la muestra, aparece en el denominador, luego cuanto más grande sea menor será el radio del intervalo y por tanto menor el intervalo. Por tanto aumentaríamos el tamaño de la muestra.

Propuesta B

1. Una empresa tiene 150 quesos manchegos y 100 botes de berenjenas de Almagro. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres quesos y un bote de berenjenas, que venderá a 200 euros; lotes de tipo B formados por un queso manchego y dos botes de berenjenas que venderá a 100 euros.

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) ¿Cuántos lotes de cada tipo deberá preparar para obtener la mayor cantidad de dinero? (0.5 puntos)

2. En un trayecto en tren entre dos ciudades se han recaudado 30800 €. Hay tres tipos de tarifas: turista, preferente y club. Siendo los precios: 100 €, 160 € y 200 € respectivamente. Se sabe que en total se han vendido 220 billetes. El número de billetes con tarifa club es el doble de la diferencia entre los billetes de tarifa turista y los de tarifa preferente.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita saber el número de billetes vendidos de tarifa turista, preferente y club. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado. (0.5 puntos)

3. La función $C(t) = t^2 - 6t + 19$, $0 \leq t \leq 6$, representa el tanto por ciento (%) de la capacidad de un pantano que ocupa el agua, en función del tiempo t medido en meses desde mayo ($t = 0$) hasta noviembre ($t = 6$).

a) ¿En el mes de junio, qué tanto por ciento de su capacidad ocupaba el agua? (0.25 puntos)

b) ¿Cuándo se alcanzó el nivel mínimo de agua? ¿Y cuál era este valor mínimo? (1.25 puntos)

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (-x - 3)^2 & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Se pide:

a) Estudia su continuidad en $x = -2$. (0.5 puntos)

b) Extremos relativos en el intervalo $(0,4)$. (0.5 puntos)

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

5. En una clase de 18 alumnos, a 10 personas les gusta el baloncesto, a 5 el fútbol y a 3 el atletismo.

a) Se sortean dos entradas entre todas ellas, ¿cuál es la probabilidad de que no le toque a nadie que le gusta el baloncesto? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos que les gusta el fútbol? (0.75 puntos)

6. Para hacer un estudio del uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los jóvenes de un centro escolar, se tomó una muestra aleatoria de 10 menores, siendo el número de horas diarias que hacían uso de las nuevas tecnologías: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas diarias de uso de NT" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio diario de horas que hacen uso de las nuevas tecnologías los alumnos de dicho centro con un nivel de confianza del 97%. (1.25 puntos)

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

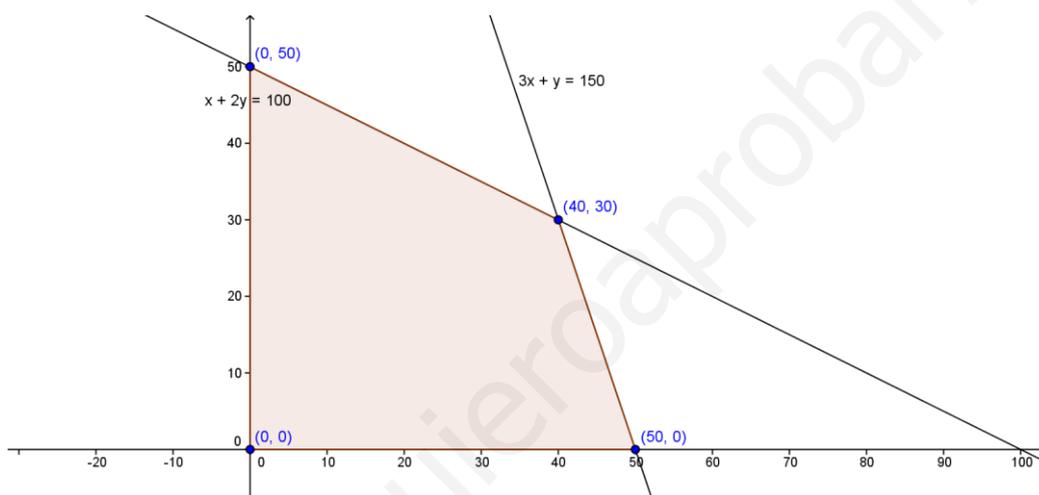
B1.- Solución:

Llamaremos $x=n^{\circ}$ de lotes tipo A, $y=n^{\circ}$ lotes tipo B

$$\text{Restricciones } \begin{cases} 3x + y \leq 150 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \begin{cases} 3x + y = 150 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 150 \\ 3x + 6y = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y = 150 \\ \text{restando} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = 40 \end{cases} \\ \text{los otros vértices son } (0,50) \text{ y } (50,0) \text{ y } (0,0) \end{cases}$$

$$\text{Objetivo maximizar } B(x, y) = 200x + 100y \Rightarrow \begin{cases} B(40,30) = 8000 + 3000 = 11000 \\ B(0,50) = 5000 \\ B(50,0) = 1000 \\ B(0,0) = 0 \end{cases}$$

Luego 30 lotes tipo A, 40 lotes tipo B y 11000€ es la respuesta.

**B2.- Solución:**

Llamaremos $t=n^{\circ}$ de billetes de clase turista, $p=n^{\circ}$ billetes clase preferente, $c=n^{\circ}$ billetes clase club

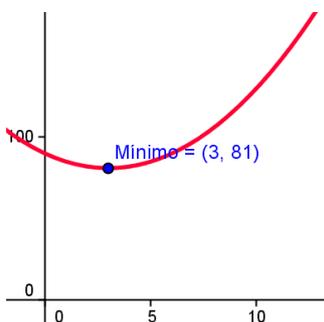
$$\begin{cases} 100t + 160p + 200c = 30800 \\ t + p + c = 220 \\ c = 2(t - p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10t + 16p + 20 \cdot 2(t - p) = 3080 \\ t + p + 2(t - p) = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - p = 220 \\ 50t - 24p = 3080 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 100 \\ p = 80 \\ c = 40 \end{cases}$$

B3.- Solución:

a) En junio $t = 1 \Rightarrow C(1) = 1 - 6 + 90 = 85\%$

b) Utilizaremos las derivadas $C(t) = t^2 - 6t + 90 \Rightarrow C'(t) = 2t - 6 \Rightarrow C''(t) = 2$

$C'(t) = 0 \Rightarrow 2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ y como $C''(3) = 2 > 0$ tenemos mínimo en $(3, C(3)) = (\text{Agosto}, 81\%)$



B4.- Solución:

a) Para ser continua en a tiene que estar definida en a , tener límite y que el límite coincida con el valor $f(a)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-x - 3)^2 = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{no tiene límite en } x = -2 \\ \text{no es continua en } x = -2 \end{array} \right. ; f(x) = \begin{cases} (-x - 3)^2 = (x + 3)^2 \text{ en } (-\infty, -2] \\ 0 \text{ en } (-2, 0] \\ (x - 1)^2 \text{ en } (0, +\infty) \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 0 = 0 \end{array} \right.$$

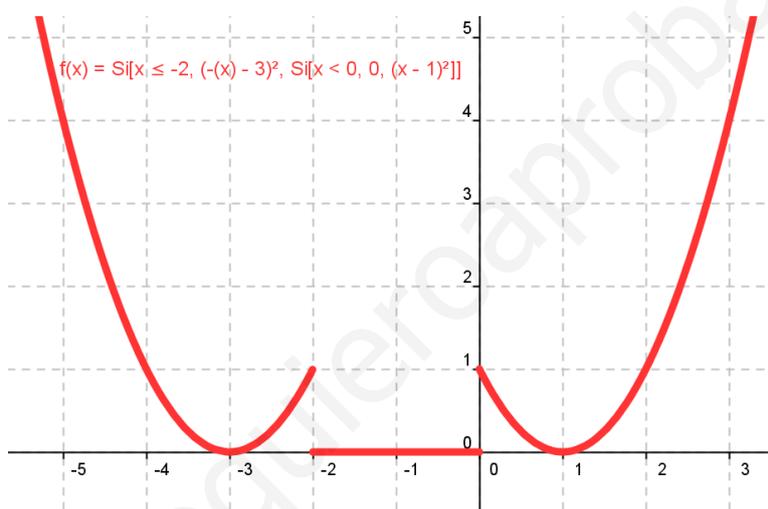
El primer trozo es la parábola x^2 desplazada 3 a la izquierda. El segundo constate 0

el tercero x^2 desplazada 1 a la derecha

$$f(x) = 2(x-1) \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ cuando } x = 1; f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo en } (1, 0)$$

$$f(x) = 2(x-1) < 0 \text{ en } (0, 1) \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } (0, 1),$$

$$f(x) = 2(x-1) > 0 \text{ en } (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } (1, +\infty)$$



B5.- Solución:

a) Parece que tienen los gustos muy definidos y que las entradas se sortean juntas por tanto

$$P(\text{toquen a alguien que le gusta baloncesto}) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow P(\text{toquen a quien no le gusta}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \text{ y}$$

es seguro que le tocan las dos entradas a la misma persona. Si suponemos que primero se sortea una entrada y después otra y en ambos casos participan todos tendríamos que:

$$P(E1 \text{ no toque a alguien que le gusta baloncesto y } E2 \text{ no toque...}) = \frac{8}{18} \cdot \frac{8}{18} = \frac{16}{81}$$

y pueden tocar las dos a la misma persona

b) Si el sorteo es con las nuevas condiciones, la probabilidad de que la E1 toque a una persona que le gusta el futbol es $5/18$, la probabilidad de que la E2 toque a una persona que le gusta el futbol es $4/17$, la probabilidad de que la E3 toque a una persona que le gusta el futbol es $3/16$, la probabilidad de que la E4 toque a una persona que le gusta el futbol es $2/15$, la probabilidad de que la E5 toque a una persona que le gusta el futbol es $1/14$, luego la probabilidad de que las 5 sean para los que les gusta el futbol es:

$$\frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{8568}$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). } \bar{x} \text{ la}$$

media de la muestra, ahora 5,73 horas (sumamos y dividimos por 10); σ la desviación típica, ahora 2,1 horas; n el tamaño de la muestra, 10.

$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha/2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17 \text{ ya que } (1 - 0,015 = 0,985). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(5,73 - 2,17 \frac{2,1}{\sqrt{10}}, 5,73 + 2,17 \frac{2,1}{\sqrt{10}}\right) = (4,49, 7,17)$$

b) Observamos que n , el tamaño de la muestra, aparece en el denominador, luego cuanto más grande sea menor será el radio del intervalo y por tanto menor el intervalo. Por tanto aumentaríamos el tamaño de la muestra.