Propuesta A

1A.- a) Determinar el valor del parámetro $a \in \Re$ **para que** la función $f(x)=(x-a)\,e^x$ tenga un mínimo relativo en **x = 0**. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto **(1'25 puntos)**
b) Para el valor de **a** obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función **f(x)** **(1'25 puntos)**

$a)$

$$f'(x)=e^x+(x-a)\,e^x=(x-a+1)\,e^x \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow (0-a+1)\,e^0=0 \Rightarrow (-a+1)\cdot 1=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

$$f''(x)=e^x+e^x+(x-1)\,e^x=(x-1+2)\,e^x=(x+1)\,e^x \Rightarrow f''(0)=(0+1)\,e^0=1\cdot 1=1>0 \Rightarrow Mínimo$$

$$Mínimo\ relativo\ en\ x=0 \Rightarrow f(0)=(0-1)\,e^0=-1$$

Veamos que valores tiene la función en los extremos de ella, al no limitarse el intervalo de búsqueda, en mas y menos infinito, si hay valores menores que **f(0)** entonces esos son los valores mínimos absolutos.

$$y=\lim_{x\to\infty}(x-1)\,e^x=\infty\cdot e^{\infty}>f(0)$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}(x-1)\,e^x=\lim_{x\to\infty}(-x-1)\,e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^x}=-\frac{1}{\infty}=0>-1$$

$$Por\ lo\ tanto\ en\ x=0\ hay\ un\ mínimo\ absoluto$$

$b)$

$$f''(x)=(x+1)\,e^x \Rightarrow f''(0)=0 \Rightarrow (x+1)\,e^x=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$
$$f'''(x)=e^x+(x+1)\,e^x=(x+1+1)\,e^x=(x+2)\,e^x \Rightarrow f'''(-1)=(-1+2)\,e^1=e\neq 0 \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ inflexión\ en\ x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1-1)\,e^{-1}=-\frac{2}{e}$$

2A.- Calcula la integral $\int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$ **(2'5 puntos)**

$$x^3-5x^2+8x-4=0 \Rightarrow Por\ Ruffini \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \underline{|0} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow (x-1)(x-2)^2=0$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)=x^2-3x+1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow A(1-2)^2=1^2-3\cdot 1+1 \Rightarrow A=-1 \\ x=2 \Rightarrow C(2-1)=2^2-3\cdot 2+1 \Rightarrow C=-1 \\ x=0 \Rightarrow 4A+2B-C=0^2-3\cdot 0+1 \Rightarrow 4A+2B-C=1 \end{cases}$$

$$4\cdot(-1)+2B-(-1)=1 \Rightarrow -4+2B+1=1 \Rightarrow 2B=4 \Rightarrow B=2$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow I=\int\frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx=-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x-2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I=-\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{du}{u}-\int\frac{du}{u^2}=-\ln t+2\ln u-\int u^{-2}du=\ln\frac{u^2}{t}-\frac{1}{(-1)}\cdot u^{-1}=\ln\frac{(x-2)^2}{(x-1)}+\frac{1}{x-2}+K$$

www.yoquieroaprobar.es

3A.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&k\\1&4&k\\0&5k&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula en función del parámetro $k\in\Re$ el rango de la matriz **A (1 punto)**

b) ¿Existe algún valor de $k\in\Re$ para el cual el sistema **AX = O** sea incompatible? **(0'75 puntos)**

c) Para que valores de $k\in\Re$ el sistema **AX = O** es compatible indeterminado **(0'75 puntos)**

$a)$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&k\\1&4&k\\0&5k&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&5&k\\0&5&k\\0&5k&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&5&k\\0&0&0\\0&5k-5&1-k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}5k-5=0\Rightarrow 5k=5\Rightarrow k=1\\1-k=0\Rightarrow k=1\end{cases}$$

$\forall k\in\Re-\{1\}\Rightarrow rang(A)=3$

$Cuando\ k=1\Rightarrow rang(A)=2$

$b)$

El sistema queda reducido a tres ecuaciones ya que la tercera es combinación lineal de las otras

No hay ningún valor de k que haga el sistema incompatible ya que una ecuación homogenea solo tiene soluciones compatibles determinadas o indeterminadas

$c)$

Cuando $k=1$, el sistema es compatible indeterminado ya que

$rang(A)=rang(A/B)=2<$ *Número de incognitas*

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&5&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow 5y+z=0\Rightarrow z=-5y\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y\Rightarrow Solución\Rightarrow(x,y,z)=(\lambda,\lambda,5\lambda)$$

www.yoquieroaprobar.es

4A.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, t \in \Re \\ z = t \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa. **(1'25 puntos)**
b) Hallar el ángulo que forman sus vectores directores **(1'25 puntos)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.
Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 - y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = t \\ \lambda = 1 - t \\ 1 - \lambda = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - t = -1 \\ \lambda + t = 1 \\ \lambda + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Dos\ filas\ iguales$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow rang\ A = 2 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Pueden\ ser\ rectas\ coincidentes\ o\ cortarse$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow No\ son\ prorcionales \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cor\tan\ en\ un\ punto$$

$b)$

$$\cos\alpha =$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow No\ son\ prorcionales \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cor\tan\ en\ un\ punto$$

$b)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(1, 1, -1) \cdot (1, -1, 1)\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = arc\cos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^o 31' 44''$$

www.yoquieroaprobar.es

Propuesta B

1B.- a) Enuncia el teorema de Bolzano y el de Rolle **(1 punto)**
b) Demuestra que la ecuación $\mathbf{e^x + x^7 = 0}$ tiene al menos una solución real **(0'75 puntos)**
c) Demuestra, que de hecho, esa solución es única **(0'75 puntos)**

a)
Teorema de Bolzano
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f(c) = 0**

Teorema de Rolle
Si **f(x)** es continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b);** entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que **f'(c) = 0**

b)
Sea $\mathbf{f(x) = e^x + x^7}$,sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, **[-1 , 1]** toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(-1) = e^{-1} + (-1)^7 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0 \text{ y } f(1) = e^1 + 1^7 = 1 + e > 0$$

con signo diferentes, **[sign f(-1) $\neq$ sign f(1)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-1, 1)$ tal que **f(c) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $\mathbf{e^c + c^7 = 0}$

c)
Comprobemos que la función $\mathbf{f(x) = e^x + x^7}$ únicamente puede tener una raíz real

La función $\mathbf{f(x) = e^x + x^7}$ es continua en toda la recta real, y los valores en sus extremos son:

$$y = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + x^7\right) = \lim_{x\to\infty}\left[e^{-x} + (-x)^7\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x} - x^7\right) = \frac{1}{e^\infty} - \infty^7 = 0 - \infty = -\infty < 0 \text{ y}$$

$y = \lim_{x\to\infty}\left(e^x + x^7\right) = e^\infty + \infty^7 = \infty + \infty = \infty > 0$ con signo diferentes, **[sign f($-\infty$) $\neq$ sign f(∞)],** por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-\infty, \infty)$ tal que **f(c) = 0** que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $\mathbf{e^c + c^7 = 0}$.

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que esta raíz es única.

Supongamos que **f(x)** tiene dos raíces ***c*** y ***d***, tales que f(c) = f(d) = 0

Como **f(x)** es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real , o sea en el intervalo **[c , d]** y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c, d)$ tal que $\mathbf{f'(x_0) = 0}$

La derivada de esta función es $\mathbf{f'(x) = e^x + 7x^6}$; así, para determinar el punto $\mathbf{x_0}$ tendremos que igualar su derivada a cero, y ademas teniendo en cuenta que $\mathbf{e^x > 0}$ para todo valor de la recta real tenemos:

$$e^x + 7x^6 = 0 \Rightarrow 7x^6 = -e^x \Rightarrow x^6 = -\frac{e^x}{7} \Rightarrow x = \sqrt[6]{-\frac{e^x}{7}} \Rightarrow \text{Sin solución}.$$

Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, por lo tanto hemos obtenido una contradicción y así, no es posible que la función tenga dos raíces en todo el campo de los números reales quedando demostrado que solo tiene una raíz real en el intervalo $(-\infty, \infty)$ tal como queríamos demostrar

www.yoquieroaprobar.es

2.B.- Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a$ con $a\in\Re$, **a > 0**. Calcular el valor del parámetro **a** para que el área encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$ **(2'5 puntos)**

$$Punto\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{a}\\ x=\sqrt{a}\end{cases}$$

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a\,dx-\int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{a}} x^2\,dx=\frac{32}{3}\Rightarrow a\cdot[x]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=\frac{32}{3}\Rightarrow a\cdot\left[\sqrt{a}-\left(-\sqrt{a}\right)\right]-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(-\sqrt{a}\right)^3\right]=\frac{32}{3}$$

$$2a\sqrt{a}-\frac{1}{3}2a\sqrt{a}=\frac{32}{3}\Rightarrow\frac{6a\sqrt{a}-2a\sqrt{a}}{3}=\frac{32}{3}\Rightarrow 4a\sqrt{a}=32\Rightarrow a\sqrt{a}=8\Rightarrow\left(a\sqrt{a}\right)^2=8^2\Rightarrow a^2a=64\Rightarrow$$

$$a^3=64\Rightarrow a=\sqrt[3]{64}=4$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $m\in\Re$, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}x-y+z=1\\ 2x-3y=-1\\ x+2y+mz=m+3\end{cases}$

(1'5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $m=7$ **(1 punto)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-3&0\\1&2&m\end{vmatrix}=-3m+4+3+2m=-m+7\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -m+7=0\Rightarrow m=7$$

$$\forall m\in\Re-\{7\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m=7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\2&-3&0&-1\\1&2&7&10\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&3&6&9\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow La\ tercera\ ecuación\ es\ combinación\ lineal\ de$$

$$las\ otras\ dos\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ m=7\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow y+2z=3\Rightarrow y=3-2z\Rightarrow x-(3-2z)+z=1\Rightarrow x-3+3z=1\Rightarrow x=4-3z$$

$$Solución\Rightarrow(x\ ,y\ ,z)=(4-3\lambda\ ,3-2\lambda\ ,\lambda)$$

www.yoquieroaprobar.es

4.B.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Halla el valor del parámetro $k \in \Re$ para que el plano π y la recta **r** sean paralelos **(1'5 puntos)**
b) Para el valor de **k** obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π **(1 punto)**

a) El producto escalar de los vectores directores de la recta y el plano es nulo ya que son perpendiculares

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) La distancia de la recta al plano es la de cualquiera de uno de sus puntos **R** al plano (tomaremos el indicado en la ecuación)

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\begin{cases} R(1, 0, -2) \\ \pi \equiv x - y = 0 \end{cases}$$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, u$$

www.yoquieroaprobar.es