Propuesta A

1A.- Dada la función $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas **f(x) (1'25 puntos)**
b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de **f(x) (1'25 puntos)**

a)

$$2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{4\cdot 0^2+3\cdot 0+4}{2\cdot 0}=\frac{4}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Asíntota\ vertical \Rightarrow x=0$$

Asíntota oblicua

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+3}{4x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{4}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$Asíntota\ oblicuas \Rightarrow y=2x+\frac{3}{2}\ cuando\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+3}{4x}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{4}=2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x+4-4x^2}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{2x}=\frac{-\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$Asíntota\ oblicuas \Rightarrow y=2x+\frac{3}{2}\ cuando\ x\to-\infty$$

2A.- Calcula las siguientes integrales

a) $\int \left[\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cdot \cos x \right] dx$ **(1'25 puntos)**

b) $\int \frac{x^3 - 1}{x+2}\, dx$ **(1'25 puntos)**

a)

$$I = \int \cos(2x)\, dx + \int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx = \int \cos t\, \frac{dt}{2} + \int u\, du = \frac{1}{2}\int \cos t\, dt + \frac{1}{2}\cdot u^2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = t \Rightarrow 2\, dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2} \\ \operatorname{sen} x = u \Rightarrow \cos x\, dx = du \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + K$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 1 & x+2 \\ \hline \underline{-x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x + 4 \\ \quad -2x^2 \quad -1 & \\ \quad 2x^2 + 4x & \\ \quad \underline{\quad 4x - 8} & \\ \qquad -9 & \end{array}$$

$$I = \int \frac{x^3 - 1}{x+2}\, dx = \int \left(x^2 - 2x + 4\right) dx - 9\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x - 9\int \frac{dt}{t} = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 9\ln t$$

$$x + 2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = \int \frac{x^3 - 1}{x+2}\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - \ln(x+2)^9 + K$$

3A.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial: $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$ **(1'25 puntos)**

b) Encuentra una fórmula general para **B^n**, donde $n \in N$ (Indicación: calcula las primeras potencias de la matriz **B**) **(1'25 puntos)**

a)

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X - 3Y = (-3)B \end{cases} \Rightarrow -X = A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -2X - 2Y = (-2)B \end{cases} \Rightarrow Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow B^3 = BB^2 = BI = B \Rightarrow B^4 = B^2B^2 = I\cdot I = I \cdots B^5 = B \Rightarrow B^6 = I \Rightarrow$$

$$n = par \Rightarrow B^n = I \Rightarrow n = impar \Rightarrow B^n = B$$

4A.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - t \quad , t \in \Re \\ z = 2t \end{cases}$

a) Determinar el parámetro $a \in \Re$ para que la recta r y el plano π sean paralelos. **(1'25 puntos)**
b) Para el valor de **a** determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto **P(1 , 1 , 0) (1'25 puntos)**

a) Si son paralelos la recta y el plano sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1 , 0 , -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (a , -1 , 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1 , 0 , -1) \cdot (a , -1 , 2) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

b) El vector director de **r'** es perpendicular, a la vez, al vector director de la recta **r** y al del plano π calculándolo como el producto vectorial de estos vectores.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1 , 0 , -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2 , -1 , 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{j} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = -\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_{r'}} = (-1 , -4 , -1) \equiv (1 , 4 , 1) \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Propuesta B

1B.- En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido **C(t)**, medida en litros, está determinada en función del tiempo **t**, medido en horas, por la expresión: $C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3} \quad t\in[1\ ,10]$

Halla cual es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en que instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre **t = 1** hora y **t = 10** horas **(2'5 puntos)**

$$C'(t)=10-\frac{10}{t^2}-\frac{240\cdot 3t^2}{t^6}=10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}=\frac{10t^4-10t^2-720}{t^4}=10\frac{t^4-t^2-72}{t^4}\Rightarrow C'(t)=0\Rightarrow$$

$$10\frac{t^4-t^2-72}{t^4}=0\Rightarrow t^4-t^2-72=0\Rightarrow t^2=u\Rightarrow u^2-u-72=0\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-72)=289\geq 0\Rightarrow$$

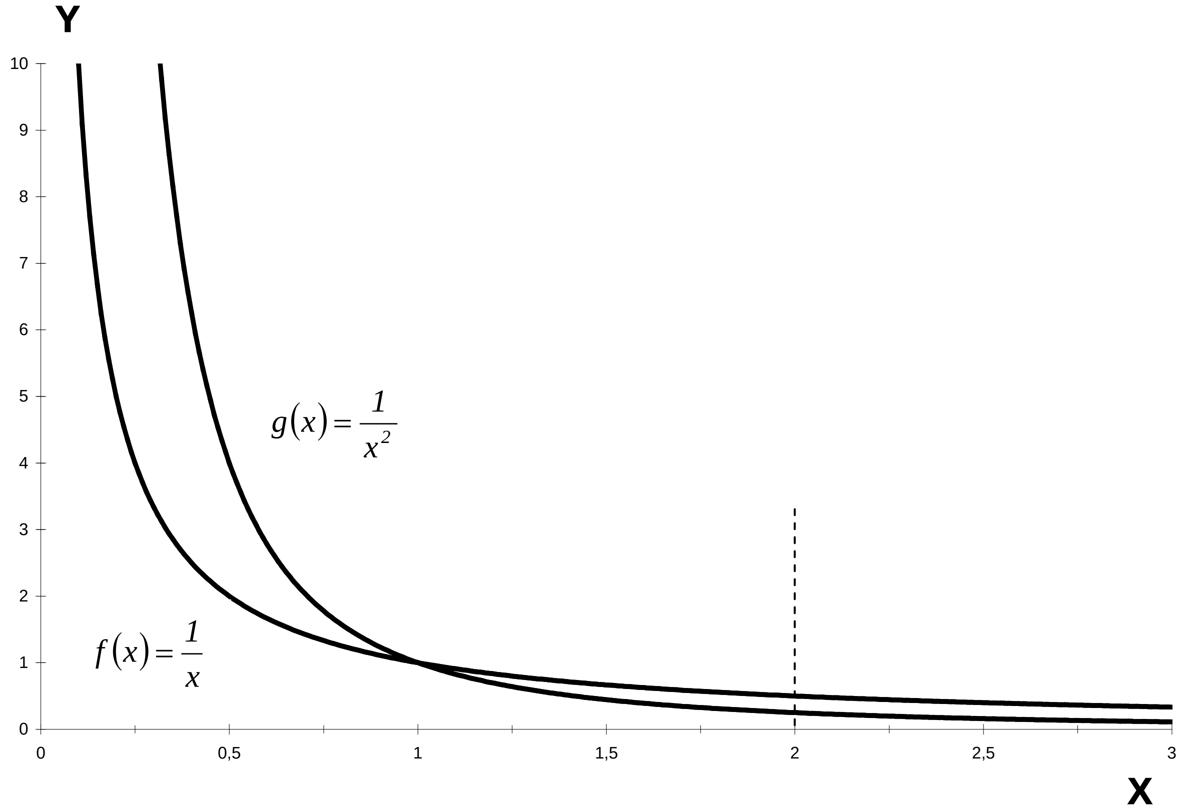
$$u=\frac{1\pm\sqrt{289}}{2}\Rightarrow\begin{cases} u=\frac{1+17}{2}=9\Rightarrow t^2=9\Rightarrow t=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\begin{cases} t=3 \\ t=-3\Rightarrow No\ es\ soluci\acute{o}n\end{cases} \\ u=\frac{1-17}{2}=-8\Rightarrow t=\pm\sqrt{-8}\Rightarrow Soluci\acute{o}n\ imaginaria\Rightarrow Sin\ soluci\acute{o}n\end{cases}\Rightarrow$$

$$C''(t)=\frac{20}{t^3}+\frac{720\cdot 4}{t^5}=\frac{20}{t^3}+\frac{2880}{t^5}\Rightarrow C''(3)=\frac{20}{3^3}+\frac{2880}{3^5}>0\Rightarrow M\acute{i}nimo\Rightarrow t=3\ horas$$

2B.- a) Representar gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}\ y\ g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta **x = 2 (0'5 puntos)**

b) Calcula el área de dicha región **(2 puntos)**

a)



Continuación del Problema 2B

$$\begin{cases} f(3)=\dfrac{1}{3} \\ g(3)=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}>\frac{1}{9} \Rightarrow f(x)>g(x) \Rightarrow x\in\Re \,/\, x>1$$

$$Punto\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow (x-1)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \Rightarrow No\ solución \end{cases}$$

$$A=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx-\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx=[ln\ x]_1^2-\int_1^2 x^{-2}\,dx=(ln\ 2-ln\ 1)-\frac{1}{(-1)}\left[x^{-1}\right]_1^2=ln\ 2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)=\left(ln\ 2-\frac{1}{2}\right)u^2$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda\in\Re$, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x+2y-z=\lambda \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$

(1'5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda=2$ **(1 punto)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\lambda-10-3-5+\lambda+12=3\lambda-6 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 3\lambda-6=0 \Rightarrow 3\lambda=6 \Rightarrow \lambda=2$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{2\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 2 & -2 \\ -10 & -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La\ tercera\ ecuación\ es\ combi-$$

$$nación\ lineal\ de\ las\ otras\ dos \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ \lambda=2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 8y-z=4 \Rightarrow z=-4+8y \Rightarrow 2x+2y-(-4+8y)=2 \Rightarrow 2x+2y+4+8y=2$$

$$2x+10y+4=2 \Rightarrow 2x=-10y-4+2 \Rightarrow x=-10y-1 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-10\lambda-1\ ,\ \lambda\ ,\ -4+8y)$$

4.B.- Dado los puntos de coordenadas **A(0 , 1 , 0)**, **B(1 , 2 , 3)**, **C(0 , 2 , 1)** y **D(k , 1 , 1)**, donde $k \in \Re$:
a) Determina el área del triángulo de vértices **A**, **B** y **C (1 punto)**
b) ¿Para que valores del parámetro **k** el tetraedro cuyos vértices son **A**, **B**, **C** y **D** tiene un volumen de **5 u^3**? **(1'5 puntos)**

a) El área del triángulo es igual a la mitad del modulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1 , 2 , 3) - (0 , 1 , 0) = (1 , 1 , 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0 , 2 , 1) - (0 , 1 , 0) = (0 , 1 , 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k} - 3\vec{i} - \vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \, u^2$$

b) El volumen del tetraedro es igual a un sexto del modulo del producto mixto (escalar por vectorial) de los vectores **AD** y **AB** por **AC**

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AD} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| \right| \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (k , 1 , 1) - (0 , 1 , 0) = (k , 0 , 1) \\ \overrightarrow{AB} = (1 , 1 , 3) \\ \overrightarrow{AC} = (0 , 1 , 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = k + 1 - 3k = -2k + 1 \Rightarrow 5 = \pm \frac{1}{6} \cdot \left| -2k + 1 \right| \Rightarrow 30 = \pm \left| -2k + 1 \right| \Rightarrow \begin{cases} 30 = -2k + 1 \\ 30 = 2k - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 29 = -2k \Rightarrow 2k = -29 \Rightarrow k = -\dfrac{29}{2} \\ 30 = 2k - 1 \Rightarrow 2k = 31 \Rightarrow k = \dfrac{31}{2} \end{cases}$$