Propuesta A

1A.- Determinar el valor del parámetro $a \in \Re \ , a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices **A(0 , 0)** , **B(0 , a)** y $C\left(\frac{a}{a-1}\ , 0\right)$ sea mínima **(2'5 puntos)**

a) El área del triángulo es igual a la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0\ , a) - (0\ , 0) = (0\ , a) \\ \overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{a-1}\ , 0\right) - (0\ , 0) = \left(\frac{a}{a-1}\ , 0\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{a}{a-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{a-1}\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{a-1} \Rightarrow S' = \frac{dS}{da} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a\,(a-1) - a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2 - 2a - a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow (a-2)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ a = 0 \Rightarrow No\ solución \end{cases} \Rightarrow$$

$$S'' = \frac{d^2S}{da^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2a-2)(a-1)^2 - 2(a-1)(a^2-2a)}{(a-1)^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(a-1)(a-1) - 2(a^2-2a)}{(a-1)^3}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{da^2} = \frac{(a-1)^2 - (a^2-2a)}{(a-1)^3} = \frac{a^2 - 2a + 1 - a^2 + 2a}{(a-1)^3} = \frac{1}{(a-1)^3} \Rightarrow S''(2) = \frac{1}{(2-1)^3} = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo$$

2A.- Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\ ln\,(x)\,dx$ (Indicación**: ln (x)** representa el logaritmo neperiano de **x**) **(1'25 puntos)**

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **(1'25 puntos)**

a)

$$\int x\ ln\,(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot ln\,(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\cdot ln\,(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot ln\,(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\cdot\left[ln\,(x) - \frac{1}{2}\right] + K$$

$$Por\ \ partes \Rightarrow \begin{cases} ln\,(x) = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ x\,dx = dv \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

b)

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t}\,dt = \int (t-1)\,dt + \int \frac{dt}{t+1} = \frac{t^2}{2} - t + \int \frac{du}{u} = \frac{x}{2} - \sqrt{x} - ln\,u$$

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+1 \\ \hline \underline{-t^2 - t} & t-1 \\ -t & \\ \underline{t+1} & \\ 1 & \end{array}$$

$$t + 1 = u \Rightarrow dt = du$$

$$I = \frac{x}{2} - \sqrt{x} - ln\,(t+1) = \frac{x}{2} - \sqrt{x} - ln\left(\sqrt{x}+1\right) + K$$

3A.- a) Despeja **X** de la ecuación matricial **X . B – I = X . A + A** donde **X**, **A**, **B** e **I** son matrices 3 x 3 **(1'25 puntos)**

b) Calcula la matriz de tamaño 3 x 3, solución de la ecuación, siendo $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&3&2\\0&0&2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **(1'25 puntos)**

a)

$$XB-XA=A+I \Rightarrow X(B-A)=A+I \Rightarrow X(B-A)(B-A)^{-1}=(A+I)(B-A)^{-1} \Rightarrow XI=(A+I)(B-A)^{-1} \Rightarrow$$
$$X=(A+I)(B-A)^{-1}$$

b)

$$B-A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&3&2\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow |B-A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow Existe\ (B-A)^{-1} \Rightarrow$$

$$(B-A)^{-1}=\frac{1}{|B-A|}\cdot\left[adj\ (B-A)^t\right] \Rightarrow (B-A)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow adj\ (B-A)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(B-A)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\ A+I=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&3&1\\0&0&2\end{pmatrix}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$X=(A+I)\cdot(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&3&1\\0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\0&3&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

4A.- a) Analizar en función del parámetro $m \in \Re$ la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0$
$\pi_2 \equiv y + z = m \quad y \quad \pi_3 \equiv mx + y - z = 8$ **(1'25 puntos)**

b) Razona que, independientemente del valor del parámetro **m**, los planos $\pi_2 \quad y \quad \pi_3$ son perpendiculares **(1'25 puntos)**

a) Analicemos el sistema de ecuaciones formado por los tres planos y según lo que sea el sistema, compatible determinado o indeterminado o incompatible, tendremos diversas soluciones.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - m - 2 = -m - 4 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

$$\forall m \in \Re - \{-4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

$$Si\ m = -4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \Rightarrow Sin\ solución$$

$$Sistema\ Incompatible$$

$$Veamos\ si\ \pi_1\ y\ \pi_2\ son\ paralelos \Rightarrow \frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow No\ lo\ son$$

$$Veamos\ si\ \pi_1\ y\ \pi_3\ son\ paralelos \Rightarrow \frac{2}{4} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow No\ lo\ son$$

$$Veamos\ si\ \pi_2\ y\ \pi_3\ son\ paralelos \Rightarrow \frac{0}{4} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow No\ lo\ son$$

$$Son\ tres\ planos\ que\ se\ cortan\ \pi_1\ con\ \pi_2\ según\ una\ recta\ paralela\ a\ la\ de\ corte\ entre\ \pi_1\ con\ \pi_3\ e\ igual- mente\ paralela\ a\ la\ recta\ determinada\ por\ \pi_2\ y\ \pi_3$$

Propuesta B

1B.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento **(1'25 puntos)**
b) Asíntotas verticales y oblicuas **(1'25 puntos)**

$a)$

$$f'(x)=\frac{2x(2-x)-(-1)x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{x(4-x)}{(2-x)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 4-x>0\Rightarrow -x>-4\Rightarrow x<4 \\ (2-x)^2>0\Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

	$-\infty$ — 0	0 — 4	4 — ∞
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x < 4	**(+)**	**(+)**	**(-)**
$(2-x)^2>0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/0<x<4$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/(x<0)\cup(x>4)$

$b)$

$$2-x=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(x)=\frac{2^2}{2-2}=\frac{4}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow Asíntota\ vertical\Rightarrow x=2$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-x}=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2-x}-(-1)x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2-x}=\frac{\infty}{-\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{-1}=-2$$

Existe asíntota oblicua $y=-x-2$ *cuando* $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(2-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2-x}=\frac{-\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{2-x}-(-1)x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2-x}=\frac{-\infty}{\infty}=$$

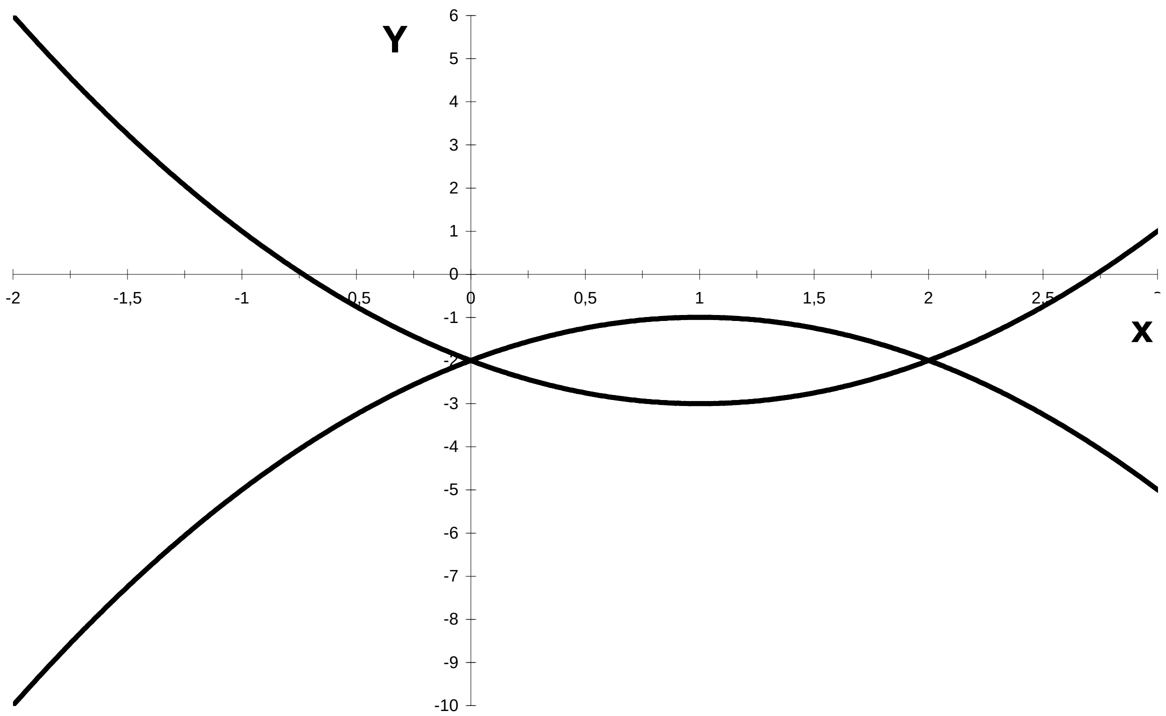
$$=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{-1}=-2$$

Existe asíntota oblicua $y=-x-2$ *cuando* $x\to-\infty$

2.B.- a) Representar gráficamente la región encerradas por la graficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 2$ **(0’5 puntos)**

b) Calcula el área de dicha región **(2 puntos)**

a)



$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2} \\ x = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2} \end{cases} \\ -x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8 < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \\ -x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2\,(x - 2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_0^2 \left(x^2 - 2x - 2\right) dx \right| - \left| \int_0^2 \left(-x^2 + 2x - 2\right) dx \right| = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x - 2\right) dx + \int_0^2 \left(-x^2 + 2x - 2\right) dx =$$

$$A = \int_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^2 = -\frac{2}{3} \cdot \left(2^3 - 0^3\right) + 2 \cdot \left(2^2 - 0^2\right) = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}\ u^2$$

3B.- a) Enuncia el teorema de Rouche-Fröbenius **(0’5 puntos)**

b) Considerar el sistema **A . X = B** donde A es un matriz **3 x 4**, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ y **B** es una matriz con una sola columna. ¿De que dimensiones es la matriz **B**? **(0’5 puntos)**

c) ¿Puede ser el sistema compatible determinado? **(0’75 puntos)**

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz **A** es dos ¿cuál es el rango de la matriz ampliada **(A/B)** ? **(0’75 puntos)**

a) **<u>Teorema de Rouche-Fröbenius</u>**
Un sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada A/B; es decir: **S es compatible** $\Leftrightarrow$ **rang (A) = rang (A/B)**

b) Al multiplicar una matriz**, A,** de dimensiones **3 x 4** por una, **X**, de dimensión **4 x 1,** nos da una matriz, **B**, de dimensión **3 x 1**

c) Nunca ya que solo hay tres ecuaciones con cuatro incógnitas

d) Al tener que ser distintos los rangos de la matriz de los coeficientes **A** y la de la matriz ampliada, según el teorema de Rouche-Fröbenius y como esta ultima nunca es menor que la de los coeficientes, de las dos posibilidades que tenemos una y tres, por lo tanto el **rango (A/B)** es tres

4.B.- Dado los puntos **P(1 , 1 , 2)** y **Q(1 , 1 , 0)** y la recta $r\equiv\begin{cases}x+2y=1\\y+z=0\end{cases}$, se pide:

a) Ecuación general del plano π que contiene al punto **P** y a la recta **r (1’25 puntos)**

b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos P y Q al plano π calculado en el apartado anterior **(1’25 puntos)**

a) Para hallar el plano π tomaremos el vector director de la recta **r**, el vector formado por un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el punto **P** ; y el vector formado por **P** y **G**, siendo este punto el generador del plano.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases}x=1-2y\\z=-y\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1-2\lambda\\y=\lambda\\z=-\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1)\\R(1,0,0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1)\equiv(2,-1,1)\\\overrightarrow{PR}=(1,0,0)-(1,1,2)=(0,-1,-2)\equiv(0,1,2)\\\overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(1,1,2)=(x-1,y-1,z-2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-2\\2&-1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow-2(x-1)+2(z-2)-(x-1)-4(y-1)=0\Rightarrow$$

$$-3(x-1)-4(y-1)+2(z-2)=0\Rightarrow\pi\equiv3x+4y-2z-3=0$$

$b)$

$$Llamando\ M\ al\ punto\ medio\ de\ P\ y\ Q\Rightarrow\begin{cases}x_M=\frac{1+1}{2}=1\\y_M=\frac{1+1}{2}=1\\z_M=\frac{2+0}{2}=1\end{cases}\Rightarrow M(1,1,1)\Rightarrow d(M,\pi)=\frac{|3\cdot1+4\cdot1-2\cdot1-3|}{\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}}$$

$$d(M,\pi)=\frac{2}{\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$$