Propuesta A

1A.- Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calcula los parámetros a , b , $c \in \Re$ sabiendo que:
- la recta tangente a la gráfica de **f(x)** en el punto de abcisa **x = -1** tiene pendiente **-3**
- **f(x)** tiene un punto de inflexión de coordenadas **(1 , 2)**

(2'5 puntos)

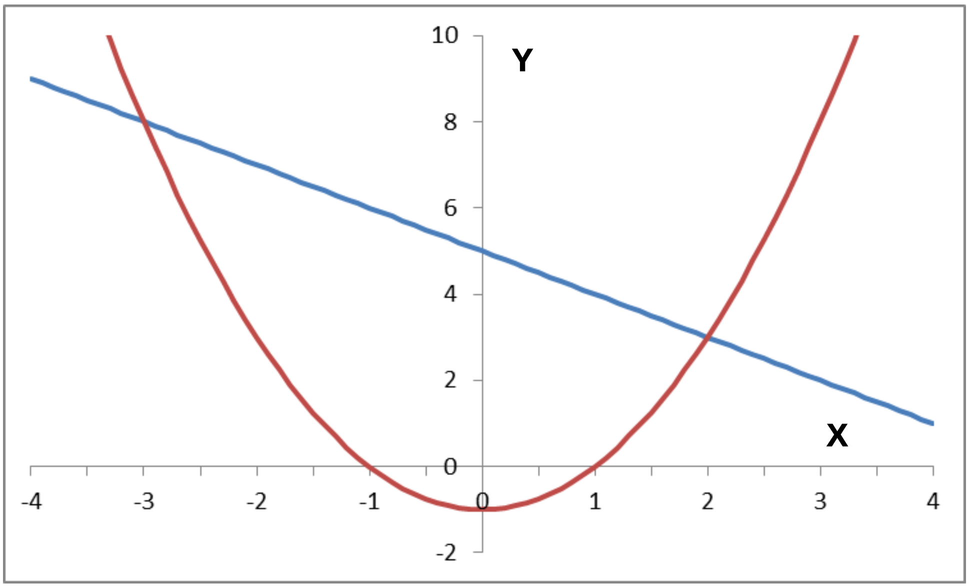
$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 1 \\ f'(-1) = -3 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = -3 \Rightarrow 3 - 2a + b = -3 \Rightarrow -2a + b = -6 \Rightarrow \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a - b = 6 \\ 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 + b + c = 1 \\ 2 \cdot (-3) - b = 6 \Rightarrow -6 - b = 6 \Rightarrow -b = 12 \Rightarrow b = -12 \end{cases} \Rightarrow -3 - 12 + c = 1 \Rightarrow c = 16$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 16$$

2A.- a) Esboza la región encerrada entre la parábola f(x) = x^2 – 1 y la recta g(x) = 5 – x **(0'5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior **(2 puntos)**

a)



b)
Puntos de corte de las funciones con el eje OX

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ 5 - x = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

Puntos de corte entre funciones

$$x^2 - 1 = 5 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

$$A = \int_{-3}^{2} (5 - x)\, dx - \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1)\, dx + \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx \right| - \int_{1}^{2} (x^2 - 1) =$$

Continuación del Problema 2ª

$$A=\int_{-3}^{2}(5-x)\,dx-\int_{-3}^{-1}\left(x^2-1\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx-\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)dx=\int_{-3}^{2}(5-x)\,dx-\int_{-3}^{2}\left(x^2-1\right)dx=\int_{-3}^{2}\left(5-x-x^2+1\right)dx$$

$$A=\int_{-3}^{2}\left(6-x-x^2\right)dx=6\cdot[x]_{-3}^{2}-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-3}^{2}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-3}^{2}=6\cdot[2-(-3)]-\frac{1}{2}\cdot\left[2^2-(-3)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[2^3-(-3)^3\right]$$

$$A=\int_{-3}^{2}\left(6-x-x^2\right)dx=6\cdot 5-\frac{1}{2}\cdot(4-9)-\frac{1}{3}\cdot[8-(-27)]=30+\frac{5}{2}-\frac{35}{3}=\frac{180+15-70}{6}=\frac{125}{6}\,u^2$$

3A.- .- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones, en función del parámetro $m\in\Re$,

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$$ **(1'5 puntos)**

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado **(1 punto)**

$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & m-2 \\ 0 & m & 1 & m-2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 1-2m & m-2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 4-2m & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$Si\ 4-2m=0\Rightarrow 2m=4\Rightarrow m=2\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$
$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$\forall m\in\Re-\{2\}\Rightarrow rang(A)=3\neq rang(A/B)=4\Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$b)$

$Cuando\ m=2\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow Sistema\ \hom ogéneo\Rightarrow Solución\ trivial\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(0\,,\,0\,,\,0)$$

4A.-

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes coordenados. **(1'25 puntos)**

b) Si llamamos **A**, **B** y **C** a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \Re$ para que el tetraedro de vértices **A**, **B** , **C** y $D\left(-\lambda^2 , 2+\lambda , 3\right)$ tenga volumen mínimo **(1'25 puntos)**

a)El área del triangulo **ABC** es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

Corte con

$$OX \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \Rightarrow \mu - 0 + 3\cdot 0 = -3 \Rightarrow \mu = -3 \Rightarrow A \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \Rightarrow A(-3 , 0 , 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \Rightarrow 0 - \alpha + 3\cdot 0 = -3 \Rightarrow -\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow B \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \Rightarrow B(0 , 3 , 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 3\cdot \beta = -3 \Rightarrow 3\beta = -3 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow C \\ z = \beta \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow C(0 , 0 , -1) \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0 , 3 , 0) - (-3 , 0 , 0) = (3 , 3 , 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0 , 0 , -1) - (-3 , 0 , 0) = (-3 , 0 , -1) \end{cases} \Rightarrow Área = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -3\vec{i} + 9\vec{k} + 3\vec{j} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{9+9+81} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$Área = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{11} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{11}\ u^2$$

b) El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3 , 3 , 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3 , 0 , -1) \\ \overrightarrow{AD} = \left(-\lambda^2 , 2+\lambda , 3\right) - (-3 , 0 , 0) = \left(3-\lambda^2 , 2+\lambda , 3\right) \end{cases} \Rightarrow Volumen = \frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{AD}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\right] \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda^2 & 2+\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\left(3-\lambda^2\right) + 27 + 3\left(2+\lambda\right) = -9 + 3\lambda^2 + 27 + 6 + 3\lambda \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left(3\lambda^2 + 3\lambda + 24\right) = \frac{3}{6}\cdot\left(\lambda^2 + \lambda + 8\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\lambda^2 + \lambda + 8\right) \Rightarrow V' = \frac{dV}{d\lambda} = \frac{1}{2}\cdot(2\lambda + 1) \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(2\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow V'' = \frac{d^2V}{d\lambda^2} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 > 0 \Rightarrow \forall\lambda \in \Re \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Propuesta B

1B.- La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0\,,+\infty)$ medidos en segundos, por la función $N(t)=\dfrac{60}{1+2e^{-t}}$

a) Comprueba que la concentración del nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para que $t \in [0\,,+\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cual es esta concentración? **(1'25 puntos)**
b**)** ¿A que valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1'25 puntos)**

$a)$

$$N(t)=\frac{60}{1+\frac{2}{e^t}}=\frac{60}{\frac{2+e^t}{e^t}}=\frac{60e^t}{2+e^t}$$

$$N'(t)=\frac{dN}{dt}=60\frac{e^t\left(2+e^t\right)-e^te^t}{\left(2+e^t\right)^2}=60\frac{e^t\left(2+e^t\right)-e^te^t}{\left(2+e^t\right)^2}=60\frac{2e^t+e^{2t}-e^{2t}}{\left(2+e^t\right)^2}=\frac{120e^t}{\left(2+e^t\right)^2}$$

$$\Rightarrow Creciente \Rightarrow N'(t)>0\Rightarrow \frac{120e^t}{\left(2+e^t\right)^2}>0\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}120>0\Rightarrow\forall t\in[0\,,+\infty)\\ e^t>0\Rightarrow\forall t\in[0\,,+\infty)\\ \left(2+e^t\right)^2>0\Rightarrow\forall t\in[0\,,+\infty)\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$Es\ creciente\ para\ \forall t\in[0\,,+\infty)\Rightarrow$$

$$La\ mínima\ concentración\ es\ cuando\ t\ es\ 0\Rightarrow N(0)=\frac{60e^0}{2+e^0}=\frac{60\cdot 1}{2+1}=\frac{60}{3}=20\ \%$$

$b)$

$$N=\lim_{t\to\infty}\frac{60e^t}{2+e^t}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{t\to\infty}\frac{60\frac{e^t}{e^t}}{\frac{2}{e^t}+\frac{e^t}{e^t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{60}{\frac{2}{e^t}+1}=\frac{60}{\frac{2}{e^\infty}+1}=\frac{60}{\frac{2}{\infty}+1}=\frac{60}{0+1}=60\ \%$$

2B.- Calcula las siguientes integrales

$$\int\frac{1}{4+9x^2}\,dx \qquad \int\left(tg\ x+\frac{1}{tg\ x}\right)dx$$ **(1'25 puntos cada integral)**

$$I_1=\int\frac{1}{4+9x^2}\,dx=\int\frac{1}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t^2}\,\frac{2}{3}\,dt=\frac{1}{6}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{6}\,arc\ tg\ t$$

$$\frac{3}{2}x=t\Rightarrow\frac{3}{2}dx=dt\Rightarrow dx=\frac{2}{3}dt$$

$$I_1=\frac{1}{6}\,arc\ tg\left(\frac{3}{2}x\right)+K$$

Continuación del Problema 2B

$$I_2 = \int \left(tg\ x + \frac{1}{tg\ x} \right) dx = \int \frac{sen\ x}{\cos x} dx + \int \frac{1}{\frac{sen\ x}{\cos x}} dx = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{\cos x}{sen\ x} dx = -\ln t + \int \frac{du}{u} = -\ln \cos x + \ln u$$

$$\cos x = t \Rightarrow -sen\ x\ dx = dt \Rightarrow sen\ x\ dx = -dt \qquad sen\ x = u \Rightarrow \cos x\ dx = du$$

$$I_2 = -\ln \cos x + \ln sen\ x = \ln \frac{sen\ x}{\cos x} = \ln tg\ x + K$$

3B.- a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in N, n \geq 2$**,** tales que **B** es la inversa de **A:**

- Si $|A| = 3$, razona cuanto vale $|B|$
- ¿Cuál es el rango de **B**? **(0'75 puntos)**

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrad **X** de orden **3** que verifica :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ **(1'75 puntos)**

$a)$

$$AB = I \Rightarrow |AB| = 1 \Rightarrow C \cdot |B| = 1 \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

$$Como\ |A| = 3 \neq 0\ y\ |B| = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow rang(A) = rang(B) = n \in N$$

$b)$

$$Siendo\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow CX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}CX = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow IX = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow Existe\ C^{-1} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{|C|} \left(adj\ C^t \right) \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 7 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ C^t = \begin{pmatrix} 21 & 56 & -74 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 56 & -74 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 56 & -74 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 168 & -518 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & -21 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -\frac{74}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow |X| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -\frac{74}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} \end{vmatrix} = 1$$

4.B.- Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \Re$ para que π y **r** sean paralelos **(1'25 puntos)**

b) Para el valor de **a** del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a **r** y es perpendicular a π **(1'25 puntos)**

a)Para que sean paralelos recta y plano sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$y = -z \Rightarrow x + z + az = 4 \Rightarrow x + z\,(1 + a) = 4 \Rightarrow x = 4 - (1 + a)\,z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 - (1 + a)\,\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2\,,0\,,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1 - a\,,-1\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (2\,,0\,,-1)\cdot(-1 - a\,,-1\,,1) = 0 \Rightarrow -2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-2a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

b) El plano π' queda definido por el vector director de la recta, por el del plano π, ya que siendo los planos perpendiculares el vector director de este plano es paralelo al plano pedido, y por el vector **RG**, siendo **R** un punto cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y **G** el punto generador del plano pedido.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **RG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$Siendo\ R(4\,,0\,,0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2\,,0\,,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = \left(-1 + \frac{3}{2}\,,-1\,,1\right) = \left(\frac{1}{2}\,,-1\,,1\right) \equiv (1\,,-2\,,2) \\ \overrightarrow{RG} = (x\,,y\,,z) - (4\,,0\,,0) \equiv (x - 4\,,y\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-y - 4z - 2\,(x - 4) - 4y = 0 \Rightarrow -2\,(x - 4) - 5y - 4z = 0 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + 5y + 4z - 8 = 0$$