

Propuesta A**1A.-** a) Enuncia el teorema de valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica **(1 punto)**b) Calcular un punto del intervalo $[0, 2]$ en que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une a los puntos de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$ **(1'5 puntos)**a) **Teorema del valor medio o de Lagrange**Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ Geométricamente, como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto c y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ esla pendiente de la cuerda que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en $[a, b]$ y tiene tangente en todos los puntos de (a, b) , es decir, es derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto de (a, b) en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$

b)

$$\begin{cases} f(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 17 \end{cases} \Rightarrow \text{De Lagrange} \Rightarrow 17 - 1 = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow f'(c) = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'(c) = 8 \Rightarrow 6c + 2 = 8 \Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow c = 1$$

2A.- Calcula las siguiente integral $\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$ **(2'5 puntos)**

$$x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow (x+1)x^2 = 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{x+2}{(x+1)x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)x^2} \Rightarrow$$

$$Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1) = x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow A \cdot 0^2 + B \cdot 0(0+1) + C(0+1) = 0+2 \Rightarrow C=2 \\ x=-1 \Rightarrow A \cdot (-1)^2 + B \cdot (-1)(-1+1) + C(-1+1) = -1+2 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow A \cdot 2^2 + B \cdot 2 \cdot (2+1) + C(2+1) = 2+2 \Rightarrow 4A+6B+3C=4 \end{cases}$$

$$4 \cdot 1 + 6B + 3 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 6B = -6 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow \frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{x+2}{(x+1)x^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$I = \int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dt}{t} - \ln x + 2 \int x^{-2} dx = \ln t - \ln x + 2 \cdot \frac{1}{(-1)} x^{-1} = \ln \frac{t}{x} - 2 \cdot x^{-1}$$

$$x+1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$I = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{2}{x} + K$$

3A.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par **(0'75 puntos)**

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.
(Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1'75 puntos)**

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow A^3 = I \cdot A = A \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I \dots\dots$$

$$\text{Cuando } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n \text{ es par} \Rightarrow A^n = I \\ \text{si } n \text{ es impar} \Rightarrow A^n = A \end{cases}$$

b)

$$\text{Como } A^{20} = I$$

$$6IX = B - 3AX \Rightarrow 6IX + 3AX = B \Rightarrow (6I + 3A)X = B \Rightarrow 3(2I + A)X = B \Rightarrow (2I + A)X = \frac{1}{3}B \Rightarrow$$

$$(2I + A)^{-1}(2I + A)X = \frac{1}{3}(2I + A)^{-1}B \Rightarrow IX = \frac{1}{3}(2I + A)^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{3}(2I + A)^{-1}B \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{3}(2I + A)^{-1} \cdot 3 \cdot I \Rightarrow X = \frac{3}{3}(2I + A)^{-1} \cdot I \Rightarrow X = (2I + A)^{-1}$$

$$2I + A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|2I + A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 - 3 = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (2I + A)^{-1} \Rightarrow (2I + A)^{-1} = \frac{1}{|2I + A|} \cdot [\text{adj } (2I + A)^t] \Rightarrow$$

$$(2I + A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } (2I + A)^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (2I + A)^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4A.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$

a) Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte **(1'25 puntos)**

b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s **(1'25 puntos)**

a)

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 2t = \lambda \\ t = a + \lambda \\ 1 + 3t = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2t = -1 \\ \lambda - t = -a \\ \lambda + 3t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2t = -1 \\ -\lambda - 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow -5t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \lambda - 2 \cdot 0 = -1 \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow -1 + 0 = -a \Rightarrow a = 1$$

El punto de corte P de r y s es $\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + 3 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 0, 1)$

b) El plano π queda determinado por los dos vectores directores de las rectas r y s y por el vector $\overrightarrow{PG}$ siendo G el punto genérico del plano buscado y P el punto de corte de las rectas hallado en el apartado anterior.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector $\overrightarrow{PG}$ es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 1, 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x+1, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - 1 + 3y + 2z - 2 - z + 1 - 3x - 3 + 2y = 0 \Rightarrow -4x + 5y + z - 5 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 5y - z + 5 = 0$$

Propuesta B

1B.- Sabiendo que la función $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ tiene un punto crítico en **(1, 1)**, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo **(2'5 puntos)**

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2bx}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \Rightarrow \frac{a \cdot 1 + b}{1^2 + 1} = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{-a \cdot 1^2 - 2b \cdot 1 + a}{(1^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2b}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + 0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

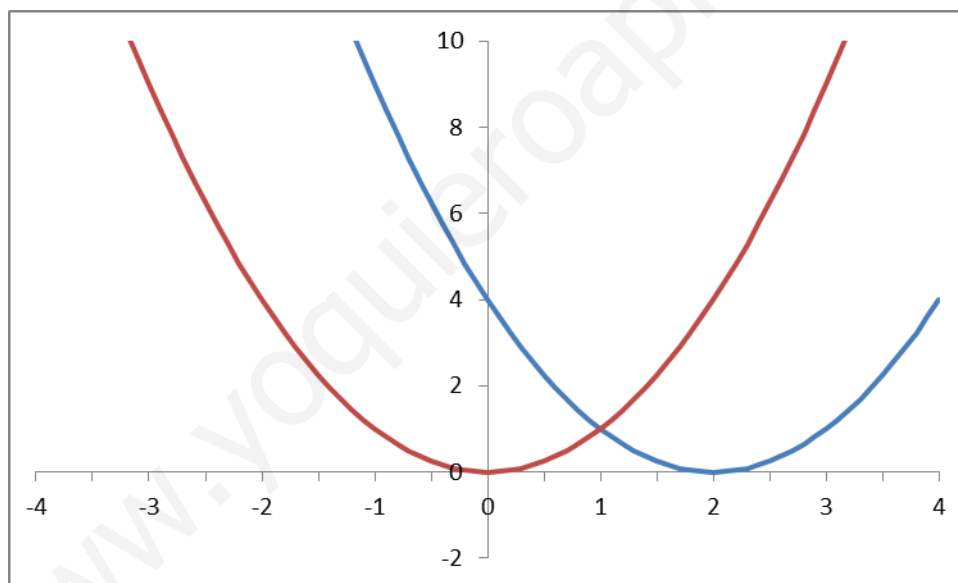
$$f(x) = \frac{2x+0}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

2.B.- a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y

$$g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad \textbf{(0'5 puntos)}$$

b) Calcula el área de la región anterior **(2 puntos)**

a)



$$\text{Punto de corte de las funciones con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^2 + 4 \cdot [x]_1^2$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0^3) + \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 1^3) - 2 \cdot (2^2 - 1^2) + 4 \cdot (2 - 1) = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3} u^2$$

3B.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)z = -m-1 \end{cases} \quad (1'5 \text{ puntos})$$

b) Calcular la solución cuando sea compatible indeterminado (**1 punto**)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & -m & m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & m+3 \end{vmatrix} = m^2(m+3) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m^2(m+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \\ m+3 = 0 \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-3, 0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $m = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

Si $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ 0z = -2 \Rightarrow z = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Si $m = -3 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -3y + z = -3 \Rightarrow 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \Rightarrow -3x + z = 1 \Rightarrow 3x = -1 + z \Rightarrow$$

$$x = -\frac{1}{3} + z \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{1}{3} + \lambda, 1 + \frac{\lambda}{3}, \lambda \right)$$

4.B.- Dado el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ una recta r' que pase por P y

a) Estudia la posición relativa de π y r **(1'25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0, 1, -1)$ **(1 punto)**

a) La recta y el plano pueden ser paralelos, cortarse en un punto o el plano contener a la recta.

En los casos de paralelismo o estar contenida la recta en el plano los vectores directores de recta y plano son perpendiculares y su producto escalar nulo, si no tienen punto en común son paralelas, de tenerlo la recta está contenida en el plano.

Si el producto escalar no es nula, recta y plano se cortan en un punto

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (0, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (0, 1, -1) \cdot (2, 1, 1) = 0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow$$

Son paralelos o la recta esta contenida en el plano $\Rightarrow$

Tomemos el punto $R(0, 1, -1)$ de r y lo introducimos en la ecuación de $\pi \Rightarrow 1 - (-1) = 3 \Rightarrow 2 \neq 3 \Rightarrow$ No pertenece a π

El plano π y la recta r son paralelos

b) Como el vector director de la recta s es perpendicular, a la vez, al vector director del plano y al de la recta, es igual al producto vectorial de ambos vectores

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (0, 1, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_s = (2, -2, -2) \equiv (-1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$