

Propuesta A

1A.- Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. **(2,5 puntos)**

Sean los números **A** y **B**

$$\begin{cases} \frac{A+B}{2} = 24 \Rightarrow A+B=48 \Rightarrow A=48-B \Rightarrow P=(48-B)B^2 \Rightarrow P'=\frac{dP}{dA} = -B^2 + 2B(48-B) \Rightarrow \\ P=AB^2 \end{cases}$$

$$P' = -B^2 + 96B - 2B^2 = -3B^2 + 96B \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow (-3)B(B-32) = 0 \Rightarrow B(B-32) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ B=32 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dA^2} = -6B + 96 \Rightarrow \begin{cases} P''(0) = -6 \cdot 0 + 96 = 96 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo} \\ P''(32) = -6 \cdot 32 + 96 = -96 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=32 \\ A=48-32=16 \end{cases}$$

2A.- Calcula las siguientes integrales: $\int \left(\frac{2 \ln x}{x} + \ln x \right) dx$, $\int 3\sqrt{2x+1} dx$ **(1,25 puntos por integral)**

$$I = \int \left(\frac{2 \ln x}{x} + \ln x \right) dx = \int \frac{2 \ln x}{x} dx + \int \ln x dx = 2 \int t dt + x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 + x \ln x - \int dx$$

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \quad \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$$I = \ln^2 x + x \ln x - x + K$$

$$\int 3\sqrt{2x+1} dx = 3 \int t \cdot t dt = 3 \int t^2 dt = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 = \sqrt{(2x+1)^3} = (2x+1)\sqrt{2x+1} + K$$

$$2x+1 = t^2 \Rightarrow 2 dx = 2t dt \Rightarrow dx = t dt$$

3A.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{cases} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. (1 punto)

a) El sistema es Compatible cuando el rango de la matriz de las incógnitas es igual al rango de la matriz de las incógnitas ampliadas con los coeficientes son iguales, siendo Determinado si, el rango, es igual al número de incógnitas e Indeterminado si es distinto al número de incógnitas. De no ser iguales el sistema es Incompatible.

a)

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & m \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & m-12 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -5 & m-6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & m-12 \\ 3 & -2 & 11 \\ 2 & -5 & m-6 \end{vmatrix}$$

$$|A/B| = -[-66 - 15(m-12) + 4(m-12) + 9(m-6)] = -(-66 - 15m + 180 + 4m - 48 + 9m - 54) = -12 + 2m$$

$$\text{Si } |A/B| = 0 \Rightarrow -12 + 2m = 0 \Rightarrow 2m = 12 \Rightarrow m = 6$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (2+1) = 9 \neq 0$$

$$\text{Si } m = 6 \Rightarrow \begin{cases} |A/B| = 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \{6\} \Rightarrow \begin{cases} |A/B| \neq 0 \\ |A| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \neq \text{rang}(A/B) = 4 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Si $m = 6 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -6 & -3 & 12 & -18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 22 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-z = -2 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow 3x - 2 \cdot 2 = 11 \Rightarrow 3x - 4 = 11 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow y + 2 = 6 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (5, 4, 2)$$

4A.- Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases}$

a) Halla el ángulo que forman π y r . Razona cuantos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta r . **(1,25 puntos)**

b) Halla la posición relativa de π y s . Razona cuantos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta s . **(1,25 puntos)**

a) El seno del ángulo α que forman el plano y la recta es igual al cociente entre el módulo del producto escalar de sus vectores directores de ambos y el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|1+1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \text{Son perpendiculares}$$

Hay infinitos planos que son perpendiculares al plano π y que contengan a la recta r ; el haz de planos que genera dicha recta

Ecuación de la recta r

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ x-1=z-1 \Rightarrow x-z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Haz de planos generados por } r \Rightarrow x - z + \lambda(y - 2) = 0$$

b) Un plano y una recta pueden ser paralelos, cortarse en un punto o la recta estar contenida en el plano. Tomando las tres ecuaciones, una del plano y las dos que determinan la recta, si el sistema es compatible determinado se cortan en un punto, si el sistema es compatible indeterminado la recta está contenida en el plano y si es incompatible el plano y la recta son paralelos

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Determinado $\Rightarrow$ Se cortan en un punto

El plano o los planos perpendiculares al plano π son generados por el vector director de dicho plano, el vector de la recta s y por el vector $\overrightarrow{PG}$, donde P es el punto de corte del plano y la recta y G el punto generador de dicho plano.

Los tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano o planos

$$x = 2 - y \Rightarrow 4y + 2z = 6 \Rightarrow 2y + z = 3 \Rightarrow z = 3 - 2y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Punto } P \Rightarrow 2 - \lambda - (3 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow 2 - \lambda - 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P \equiv \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 0, -1) \\ \vec{v}_r = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$z - 1 + y - 1 + x - 1 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 3y + z - 5 = 0$$

Propuesta B**1B.-** a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. **(1,25 puntos)**b) Calcula un punto del intervalo $[-2, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 12)$. **(1,25 puntos)**a) **Teorema del valor medio o de Lagrange**Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ Geométricamente, como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto c y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ esla pendiente de la cuerda que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en $[a, b]$ y tiene tangente en todos los puntos de (a, b) , es decir, es derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto de (a, b) en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ b) Como $f(x)$ es continua en $[-2, 2]$ y derivable en $(-2, 2)$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (-2, 2)$ tal que: $f(2) - f(-2) = f'(c)[2 - (-2)]$

$$\begin{cases} f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \\ f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 4 + 6 + 2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 12 - 0 = f'(c)[2 - (-2)] \Rightarrow f'(c) = \frac{12}{4} = 3 = m \Rightarrow$$

$$f'(c) = 2x + 3 \Rightarrow m = f'(c) \Rightarrow 2x + 3 = 3 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

2B.- El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y el eje de abscisas, es de **12** unidades de superficie. Calcula el valor de **a**. **(2,5 puntos)**

$$\text{Puntos de corte de la función con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow a(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x - 2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$1 \in (0, 2) \Rightarrow f(1) = a(1^2 - 2 \cdot 1) = -a < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$12 = \left| \int_0^2 a(x^2 - 2x) dx \right| \Rightarrow 12 = - \int_0^2 a(x^2 - 2x) dx \Rightarrow 12 = \int_0^2 a(2x - x^2) dx \Rightarrow 12 = 2a \cdot \frac{1}{2} [x^2]_0^2 - a \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^2 \Rightarrow$$

$$12 = a(2^2 - 0^2) - \frac{a}{3}(2^3 - 0^3) \Rightarrow 12 = 4a - \frac{8a}{3} \Rightarrow 12 = \frac{12a - 8a}{3} \Rightarrow 36 = 4a \Rightarrow a = \frac{36}{4} = 9$$

3B.- Evariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois. **(1,25 puntos por plantear un sistema de ecuaciones lineales con los datos del problema y 1,25 puntos por calcular las edades)**

a) Siendo **G**, **A** y **R** las edades cuando murieron respectivamente Galois, Abel y Ramanujan

$$\begin{aligned} \begin{cases} G + A + R = 78 \\ \frac{G + A + R}{3} = A \\ 4R + 2A = 9G \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} G + A + R = 78 \\ G + A + R = 3A \\ 9G - 2A - 4R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G + A + R = 78 \\ G - 2A + R = 0 \\ 9G - 2A - 4R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 78 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 9 & -2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 78 \\ 3 & 0 & 3 & | & 156 \\ 11 & 0 & -2 & | & 156 \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 78 \\ 1 & 0 & 1 & | & 52 \\ 11 & 0 & -2 & | & 156 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 78 \\ 1 & 0 & 1 & | & 52 \\ 0 & 0 & -13 & | & -416 \end{pmatrix} \Rightarrow -13R = -416 \Rightarrow R = \frac{-416}{-13} = 32 \text{ años tenia Ramanujan} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$G + 32 = 52 \Rightarrow G = 20 \text{ años tenia Galois} \Rightarrow 20 + A + 32 = 78 \Rightarrow A = 78 - 52 = 26 \text{ años tenia Abel}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (G, A, R) = (20, 26, 32)$$

4B.- a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ esté contenida en

el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de **k** obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π , de modo que la intersección de ambos planos sea **r**. **(1,25 puntos)**

a) Si la recta está contenida en el plano su vector director tiene que ser perpendicular al de la recta y, por ello, el producto escalar, de ambos, debe de ser nulo. Como segunda condición uno cualquiera de los puntos **R** de la recta (tomaremos el indicado en la ecuación) pertenece al plano π

a)

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (1, 2, 1) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{v}_r$$

$$R(1, k, 0) \Rightarrow 1 + 2k + 0 = 7 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$$

b) El plano π' , es aquel que perteneciendo al haz de planos generados por la recta tenga un vector director perpendicular al del plano π

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = z \Rightarrow \begin{cases} x-1 = z \\ y-3 = -z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Haz de rectas} \Rightarrow x - z - 1 + \mu(y + z - 3) = 0 \Rightarrow \pi_{Hr} \equiv x + \mu y + (\mu - 1)z - 1 - 3\mu = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 2, 1) \\ \vec{v}_{\pi_{Hr}} = (1, \mu, \mu - 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{v}_{\pi_{Hr}} \Rightarrow (1, 2, 1) \cdot (1, \mu, \mu - 1) = 0 \Rightarrow 1 + 2\mu + \mu - 1 = 0 \Rightarrow 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$x + 0 \cdot y + (0 - 1)z - 1 - 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x - z - 1 = 0$$