Propuesta A

1A.- a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**
b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo **(1 , 2)** donde la recta tangente a la gráfica de la función **$f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$** tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

a) **Teorema de Rolle**
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a , b)$ tal que **f'(c) = 0**

b) La función dada **f(x)** es continua en **[1 , 2],** derivable en **(1 , 2)** con valores en los extremos del intervalo
$f(1) = 1^5 + 3.1^4 - 5.1^3 - 15.1^2 + 4.1 + 12 = 1 + 3 - 5 - 15 + 4 + 12 = 0$
$f(2) = 2^5 + 3.2^4 - 5.2^3 - 15.2^2 + 4.2 + 12 = 32 + 48 - 40 - 60 + 8 + 12 = 0$
que verifican que **f(1) = f(2)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (1 , 2)$ tal que **f'(c) = 0** que es el valor de la pendiente

2A.- Calcula el valor del parámetro $a \in \Re$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas **$f(x) = -x^2 + a^2$** y **$g(x) = -4x^2 + 4a^2$** sea **32** unidades de superficie.
(2,5 puntos)

$$Puntos\ de\ corte\ de\ las\ \ funciones\ con\ OX \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases} \\ g(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4a^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = a^2 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow -x^2 + a^2 = -4x^2 + 4a^2 \Rightarrow -3x^2 + 3a^2 = 0 \Rightarrow x = a^2 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

$$0 \in (-a , a) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 + a^2 = a^2 > 0 \\ g(0) = -4 \cdot 0^2 + 4a^2 = 4a^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 4a^2 > a^2 \Rightarrow g(x) > f(x)$$

$$Como\ a > 0$$

$$32 = \int_0^a g(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \Rightarrow 32 = \int_0^a \left(-4x^2 + 4a^2\right) dx - \int_0^a \left(-x^2 + a^2\right) dx \Rightarrow 32 = \int_0^a \left(-4x^2 + 4a^2 + x^2 - a^2\right) dx \Rightarrow$$

$$32 = \int_0^a \left(-3x^2 + 3a^2\right) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^a \left(-3x^2 + 3a^2\right) dx = -3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^a + 3a^2 \cdot [x]_0^a = -\left(a^3 - 0^3\right) + 3a^2 \cdot (a - 0) = -a^3 + 3a^3 = 2a^3 \Rightarrow$$

$$32 = 2a^3 \Rightarrow a^3 = 16 \Rightarrow a = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$$

3A.- a) Despeja ***X*** en la ecuación matricial ***AX = I₃ - 2BX***, donde ***I₃*** es la matriz identidad de orden 3 y **A**, ***B*** y ***X*** son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula ***X***, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ **(1,25 puntos)**

$a)$

$$AX+2BX=I_3\Rightarrow(A+2B)X=I_3\Rightarrow(A+2B)^{-1}(A+2B)\,X=(A+2B)^{-1}I_3\Rightarrow I_3X=(A+2B)^{-1}\Rightarrow$$

$$X=(A+2B)^{-1}$$

$b)$

$$A+2B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A+2B|=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\cdot I_2=1\neq0\Rightarrow Existe\ (A+2B)^{-1}\Rightarrow$$

$$(A+2B)^{-1}=\frac{1}{|A+2B|}\cdot\left[adj\ (A+2B)^t\right]\Rightarrow(A+2B)^t=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ (A+2B)^t=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\0&1&0\\-2&4&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(A+2B)^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}3&-6&-1\\0&1&0\\-2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\0&1&0\\-2&4&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=(A+2B)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\0&1&0\\-2&4&1\end{pmatrix}$$

4A.- Dados los planos $\pi\equiv ax+2y+z=4\,,a\in\Re$, y $\pi'\equiv 2x-4y-2z=b\,,b\in\Re$:

a) Razona para que valores de $a\,,b\in\Re$ son π y π' coincidentes. **(1 punto)**

b) Razona para que valores de $a\,,b\in\Re$ son π y π' paralelos no coincidentes. **(0,75 puntos)**

c) Razona para que valores de $a\,,b\in\Re$ son π y π' perpendiculares. **(0,75 puntos)**

a) Los vectores directores de ambos planos tienen que ser iguales o proporcionales y tendrán además puntos en común

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(a\,,2\,,1)\\ \overrightarrow{v_{\pi'}}=(2\,,-4\,,-2)\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{2}{-4}=\frac{1}{-2}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{1}{-2}\Rightarrow-2a=2\Rightarrow a=-1$$

$$\pi\equiv -x+2y+z-4=0\Rightarrow Calculemos\ uno\ de\ sus\ puntos\Rightarrow(1\,,2\,,z)\Rightarrow$$

$$Hallemos\ z\Rightarrow-1+2\cdot2+z-4=0\Rightarrow-1+z=0\Rightarrow z=1\Rightarrow P(1\,,2\,,1)\Rightarrow$$

$$El\ punto\ P\ pertenece,tambien,al\ plano\ \pi'\Rightarrow2\cdot1-4\cdot2-2\cdot1=b\Rightarrow b=-8\Rightarrow\pi'\equiv2x+4y-2z+8=0$$

b) Los planos que cumplen la condición que se pide tendrán los vectores directores iguales o proporcionales, por lo tanto **a = -1**, y el valor de **b** será cualquier número real menos **- 8**

Continuación del problema 4A de la opción A

c) La condición para que los planos sean perpendiculares es que lo sean sus vectores directores y por lo tanto su producto vectorial nulo.
El valor de **b** se cumple para cualquier número real ya que no dependen, de su valor, los vectores directores

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,\ 2\ ,\ 1) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (2\ ,\ -4\ ,\ -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_{\pi'}} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{\pi'}} = 0 \Rightarrow (a\ ,\ 2\ ,\ 1)\cdot(2\ ,\ -4\ ,\ -2) = 0 \Rightarrow 2a - 8 - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ \forall b \in \Re \end{cases}$$

Propuesta B

1B.- a) Calcula para que valores del parámetro $a \in \Re$ se verifica la igualdad $\lim_{x\to 0}[\cos(ax)]^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula el limite $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ **(1,25 puntos)**

$a)$

$$Siendo\ L = \lim_{x\to 0}[\cos(ax)]^{\frac{1}{x^2}} = [\cos(a\cdot 0)]^{\frac{1}{0^2}} = (\cos 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indeterminación$$

$$L = e^{-2} \Rightarrow \ln L = \ln e^{-2} \Rightarrow \ln L = (-2)\cdot \ln e \Rightarrow \ln L = (-2)\cdot 1 \Rightarrow \ln L = -2 \Rightarrow$$

$$\ln L = \ln \lim_{x\to 0}[\cos(ax)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \ln[\cos(ax)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln[\cos(ax)] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[\cos(ax)]}{x^2} = \frac{\ln[\cos(a\cdot 0)]}{0^2} =$$

$$= \frac{\ln(\cos 0)}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(ax)}\cdot[-sen(ax)]\cdot a}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a[tg(ax)]}{2x} =$$

$$= \frac{-a[tg(a\cdot 0)]}{2\cdot 0} = \frac{-a\cdot tg\ 0}{0} = \frac{-a\cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\frac{1}{\cos^2(ax)}\cdot a}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{-a^2}{2\cos^2(ax)} =$$

$$= \frac{-a^2}{2\cos^2(a\cdot 0)} = \frac{-a^2}{2\cos^2 0} = \frac{-a^2}{2\cdot 1^2} = -\frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\ln L = -\frac{a^2}{2} = -2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) = \infty\cdot(\infty-\infty) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\,[x+1-(x-1)]}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\,(x+1-x+1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

2B.- Calcula las siguientes integrales: $\int \frac{2\cos x}{1+sen^2 x}\,dx \qquad \int \left(x^2+2x\right)\ln x\,dx$

(1,25 puntos por integral)

$$2\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}\,dx = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\cdot arc\ tg\ t = 2\cdot arc\ tg\ (sen\ x)+K$$
$$sen\ x = t \Rightarrow \cos x\ dx = dt$$

$$I=\int \left(x^2+2x\right)\ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \int\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3}+x\right)dx$$

$$\begin{cases} \ln x = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ \left(x^2+2x\right)dx = dv \Rightarrow v = \int\left(x^2+2x\right)dx = \dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$I=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + K$$

3B.- Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -4x-2y+mz=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro ***m*** para el que el sistema sea incompatible? **(0,5 puntos)**
b) Estudia para que valor del parámetro ***m*** el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial
x = *y* = *z* = 0. **(1 punto)**
c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \Re$. **(1 punto)**

a) Es un **sistema de ecuaciones homogéneas,** nunca puede ser incompatible por lo tanto no existe ningún valor real **m** que haga lo pedido en el apartado del problema

b) Si no hay solución trivial el sistema tiene que ser **compatible indeterminado** y eso determina que el rango de la matriz de las incógnitas sea menor o igual a dos ya que son tres las incógnitas, se hallara el valor de m anulando el determinante de dicha matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m-4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & m-4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10+2m-8=0 \Rightarrow 2m+2=0 \Rightarrow m=-1$$

$$Si\ m=-1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rang(A)=2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & m & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2y-5z=0 \Rightarrow 2y=5z \Rightarrow y=\frac{5z}{2} \Rightarrow x+\frac{5z}{2}-z=0$$

$$x+\frac{3z}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{3z}{2} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-\frac{3}{2}\lambda\ ,\ \frac{5}{2}\lambda\ ,\ \lambda\right) \equiv (-3\lambda\ ,\ 5\lambda\ ,\ 2\lambda)$$

c) Será Compatible Determinada con solución trivial todo cuando m sea cualquier numero real menos -1

$$\forall m \in \Re - \{-1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

4B.- Dados el punto ***P*(1 , 0 , 1)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \,,\, \lambda \in \Re \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta ***s*** que corta perpendicularmente a ***r*** y pasa por el punto ***P***. **(1,25 puntos)**
b) Calcula el punto simétrico ***Q*** de ***P*** respecto a ***r***. **(1,25 puntos)**

a) El vector **PR_G**, siendo **R_G** el punto genérico de la recta **r**, es perpendicular al vector director de la recta **r** y por lo tanto el producto escalar de ambos nulo
Hallado el punto **R** de corte de ambas rectas la recta **s** queda definida por el vector **PR** y el punto **P**

$a)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \,,\, \lambda \in \Re \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{PR_G} = (\lambda\,,1+\lambda\,,2+\lambda) - (1\,,0\,,1) = (\lambda-1\,,1+\lambda\,,1+\lambda) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PR_G} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PR_G} = 0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,1)\cdot(\lambda-1\,,1+\lambda\,,1+\lambda) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 = 0 \Rightarrow R\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 0 \\ z = 2 + 0 \end{cases} \Rightarrow R(0\,,1\,,2)$$

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PR} = (0\,,1\,,2) - (1\,,0\,,1) = (-1\,,1\,,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \quad,\, \mu \in \Re \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

b) El punto **R** hallado en el apartado anterior es el punto medio entre **P** y **Q**

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow 1 + x_Q = 0 \Rightarrow x_Q = -1 \\ 1 = \dfrac{0 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2 \\ 2 = \dfrac{1 + z_Q}{2} \Rightarrow 1 + z_Q = 4 \Rightarrow z_Q = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(-1\,,2\,,3)$$