Propuesta A

1A. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \Re$ para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & si \quad x < 0 \\ x^2 + be^x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en *x* = 0. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f*(*x*) en el punto de abscisa ***x* = 0**. **(1 punto)**

$a)$

Continuidad

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0^2 - 2 \cdot 0 + a = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^2 + be^0 + 3 = b \cdot 1 + 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow a = 3 + b$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si \quad x < 0 \\ 2x + be^x & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 + be^0 = 0 + b \cdot 1 = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \Rightarrow b = -2 \Rightarrow$$

$$a = 3 + (-2) = 1$$

2A. Calcula la integral definida $\int_0^1 (x^2 + x + 1) e^{-x}\, dx$ **(2,5 puntos)**

$$\int (x^2 + x + 1) e^{-x}\, dx = -(x^2 + x + 1) e^{-x} - \int -e^{-x} (2x + 1)\, dx = -(x^2 + x + 1) e^{-x} + \int e^{-x} (2x + 1)\, dx$$

$$Por \;\; partes \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + x + 1 \Rightarrow du = (2x + 1)\, dx \\ e^{-x}\, dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x}\, dx = -\int e^t\, dt = -e^t = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int (x^2 + x + 1) e^{-x}\, dx = -(x^2 + x + 1) e^{-x} + \int e^{-x} (2x + 1)\, dx = -(x^2 + x + 1) e^{-x} - (2x + 1) e^{-x} - \int -e^{-x}\, 2\, dx$$

$$\begin{cases} u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2\, dx \\ e^{-x}\, dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x}\, dx = -\int e^t\, dt = -e^t = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int (x^2 + x + 1) e^{-x}\, dx = -(x^2 + x + 1 + 2x + 1) e^{-x} + 2 \int e^{-x}\, dx = -(x^2 + 3x + 2) e^{-x} + 2 (-e^{-x}) =$$

$$= -(x^2 + 3x + 2) e^{-x} - 2\, e^{-x} = (x^2 + 3x + 4) e^{-x} + K$$

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) e^{-x}\, dx = -\left[(x^2 + 3x + 4) e^{-x}\right]_0^1 = -\left[(1^2 + 3 \cdot 1 + 4) e^{-1} - (0^2 + 3 \cdot 0 + 4) e^{-0}\right] = -(8e^{-1} - 4) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) e^{-x}\, dx = 4 - \frac{8}{e}$$

3A. a) Sabiendo que *A* es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^T|$, $|A^3|$ **(1 punto)**

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$ **(1,5 puntos)**

$a)$

$$|-A| = (-1)^2 |A| = |A| = 5$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$$|A^T| = |A| = 5$$

$$|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$b)$

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + 3 \cdot 0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} a & -b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot 0 = (-3) \cdot 2 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 400 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-400) \cdot 2 = -800$$

4A. a) Halla $a \in \Re$ para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$ se corten en un punto. **(1,25 puntos)**

b) Para dicho valor de ***a***, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a ***r*** y ***s***. **(1,25 puntos)**

a) Para que se corten en un punto el sistema que se forma en la igualación de las dos ecuaciones paramétricas es compatible determinado, teniendo que ser el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada nulo, ya que son dos las incógnitas a calcular

$$r \equiv 3y-4z=3 \Rightarrow y-\frac{4}{3}z=1 \Rightarrow y=1+\frac{4}{3}z \Rightarrow -x+1+\frac{4}{3}z-3z=2 \Rightarrow -x-\frac{5}{3}z=1 \Rightarrow x=-1-\frac{5}{3}z \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r}=\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \equiv (-5\,,4\,,3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-5\lambda \\ y=1+4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$x=-y \Rightarrow -3y+2y+z=a \Rightarrow z=a+y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-\mu \\ y=\mu \\ z=a+\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1-5\lambda=-\mu \\ 1+4\lambda=\mu \\ \lambda=a+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda-\mu=-1 \\ 4\lambda-\mu=-1 \\ \lambda-\mu=a \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & .1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5a+1-4-1+5+4a=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow$$

$$a=-1$$

b) El plano π queda determinado por los vectores directores de las dos rectas y por el vector RG, siendo R un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación paramétrica) y G el punto genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que formas es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$Siendo\ R(-1\,,1\,,0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-5\,,4\,,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{RG}=(x\,,y\,,z)-(-1\,,1\,,0)=(x+1\,,y-1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4(x+1)-3(y-1)-5z+4z-3(x+1)+5(y-1)=0 \Rightarrow (x+1)+2(y-1)-z=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y-z-1=0$$

Propuesta B

1B. a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1+x^2e^{-x^2}$ **(1,5 puntos)**
b) Calcula las asíntotas de $f(x)$. **(1 punto)**

$a)$

$$f'(x)=2xe^{-x^2}+(-2x)\,x^2e^{-x^2}=2xe^{-x^2}(1-x^2)=2xe^{-x^2}(1-x)(1+x)\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$2xe^{-x^2}(1-x)(1+x)>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\\ e^{-x^2}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ 1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1\\ 1+x>0\Rightarrow x>-1\end{cases}$$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a ∞
2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
e^{-x2} > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x < 1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Decreciente $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(0<x<1)$ **Creciente** $\forall x\in\Re/(-1<x<0)\cup(x>1)$

Mínimo relativo en $x=-1\Rightarrow f(-1)=1+(-1)^2e^{-(-1)^2}=1+e^{-1}=1+\dfrac{1}{e}=\dfrac{e+1}{e}$ de decreciente pasa a creciente

Máximo relativo en $x=0\Rightarrow f(0)=1+0^2e^{-0^2}=1+0\cdot e^0=1$ de creciente pasa a decreciente

Mínimo relativo en $x=1\Rightarrow f(1)=1+1^2e^{-1^2}=1+e^{-1}=1+\dfrac{1}{e}=\dfrac{e+1}{e}$ de decreciente pasa a creciente

b)

$$f(x)=1+\frac{x^2}{e^{x^2}}=\frac{e^{x^2}+x^2}{e^{x^2}}\Rightarrow e^{x^2}>0\Rightarrow No\ existe\ asíntota\ vertical$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}+2x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(e^{x^2}+1\right)}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}}+\frac{1}{e^{x^2}}=1+\frac{1}{\infty}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$, *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}+x^2}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{(-x)^2}+(-x)^2}{e^{(-x)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}+x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}+2x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(e^{x^2}+1\right)}{2xe^{x^2}}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$, *cuando* $x\to-\infty$

No hay asíntotas oblicuas

2B. Para cada *c* > *2* definimos *A*(*c*) como el área de la región encerrada entre la gráfica de $f(x)=\frac{1+x^2}{x^4}$ el eje de abscisas, y las rectas ***x* = 1** y ***x* = *c***.

a) Calcula ***A*(*c*). (1,5 puntos)**

b) Calcula $\lim_{c\to\infty} A(c)$ **(1 punto)**

$a)$

$$A(c)=\int_1^c f(x)\,dx=\int_1^c \frac{1+x^2}{x^4}\,dx=\int_1^c \frac{1}{x^4}\,dx+\int_1^c \frac{x^2}{x^4}\,dx=\int_1^c x^{-4}\,dx+\int_1^c x^{-2}\,dx=\frac{1}{-3}\cdot\left[x^{-3}\right]_1^c+\frac{1}{-1}\cdot\left[x^{-1}\right]_1^c$$

$$A(c)=\frac{1}{-3}\cdot\left[\frac{1}{x^3}\right]_1^c+\frac{1}{-1}\cdot\left[\frac{1}{x}\right]_1^c=\frac{1}{-3}\cdot\left(\frac{1}{c^3}-\frac{1}{1^3}\right)+\frac{1}{-1}\cdot\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1-c^3}{c^3}\right)-\left(\frac{1-c}{c}\right)=\frac{c^3-1}{3c^3}+\frac{c-1}{c}$$

$$A(c)=\frac{c^3-1}{3c^3}+\frac{3c^3-3c^2}{3c^3}=\frac{4c^3-3c^2-1}{3c^3}$$

$b)$

$$\lim_{c\to\infty} A(c)=\lim_{c\to\infty}\frac{4c^3-3c^2-1}{3c^3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{c\to\infty}\frac{4\frac{c^3}{c^3}-3\frac{c^2}{c^3}-\frac{1}{c^3}}{3\frac{c^3}{c^3}}=\lim_{c\to\infty}\frac{4-\frac{3}{c}-\frac{1}{c^3}}{3}=\frac{4-\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{3}=\frac{4-0-0}{3}=\frac{4}{3}$$

3B. a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases}, a\in\Re$ es compatible indeterminado. Calcula ***a*** y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro. **(2 puntos)**

b) Para el valor de *a* encontrado, da una solución particular del sistema tal que *x* = *y*. **(0,5 puntos)**

$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & a & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & a-3 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & a-8 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow Para\ ser\ Compatible\ indeterminado\Rightarrow$$

$$a-8=0\Rightarrow a=8\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow 3y-5z=0\Rightarrow 3y=5z\Rightarrow y=\frac{5}{3}z\Rightarrow x-\frac{10}{3}z+3z=4\Rightarrow$$

$$x-\frac{1}{3}z=4\Rightarrow x=\frac{1}{3}z+4\Rightarrow Solución\Rightarrow\left(4+\frac{1}{3}\lambda\ ,\ \frac{5}{3}\lambda\ ,\ \lambda\right)\equiv(4+\lambda\ ,\ 5\lambda\ ,\ 3\lambda)$$

$b)$

$$4+\lambda=5\lambda\Rightarrow 4\lambda=4\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow Solución\Rightarrow(4+1\ ,\ 5\cdot 1\ ,\ 3\cdot 1)\equiv(5\ ,\ 5\ ,\ 3)$$

$$4+\frac{1}{3}\lambda=\frac{5}{3}\lambda\Rightarrow\frac{4}{3}\lambda=4\Rightarrow\lambda=\frac{12}{4}=3\Rightarrow Solución\Rightarrow\left(4+\frac{1}{3}\cdot 3\ ,\ \frac{5}{3}\cdot 3\ ,\ 3\right)\equiv(5\ ,\ 5\ ,\ 3)$$

4B. Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$ $a \in \Re$ se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro ***a*** para el que ***r*** y π sean paralelos. **(0,75 puntos)**
b) Estudia si existe algún valor del parámetro *a* para el que *r* y π se corten perpendicularmente. **(0,75 puntos)**
c) Para ***a* = 1**, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a ***r*** y corte perpendicularmente a π **(1 punto)**

a) Al ser paralelos plano y recta sus vectores directores tienen que ser perpendiculares y, por ello, su producto escalar nulo

$$z = 1 - x \Rightarrow 2x + y + a(1 - x) = 0 \Rightarrow y + 2x - ax + a = 0 \Rightarrow y = (a - 2)x - a \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, a - 2, -1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, a-2, -1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (1, a-2, -1)\cdot(1, -1, 0) = 0 \Rightarrow 1 - a + 2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

b) Si tienen que ser perpendiculares sus vectores serán iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, a-2, -1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{0} \Rightarrow No\ \ pueden\ ser\ \ perpendiculares$$

c) El plano π' queda determinado por los vectores directores de la recta y el plano y por el vector RG, siendo R un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en la ecuación de la recta r) y G el punto genérico del plano. Los tres planos al ser coplanarios formaran una matriz cuyo determinante es nulo y la ecuación pedida

$$Si\ R(0, -1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 1-2, -1) = (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (0, -1, 1) = (x, y+1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(y+1) - (z-1) + (z-1) - x = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y + 1 = 0$$