Propuesta A

1A. a) Calcula siguientes límites: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{sen\ x}}$, $\lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{x+sen\ x}}$ **(1,25 puntos cada límite)**

Nota: tg x denota a la tangente de *x*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{sen\ x}}=\frac{\ln(1+2\cdot 0)}{0\cdot e^{sen\ 0}}=\frac{\ln(1+0)}{0\cdot e^{0}}=\frac{\ln 1}{0\cdot 1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{e^{sen\ x}+x\cdot\cos x\cdot e^{sen\ x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{e^{sen\ x}(1+x\cdot\cos x)}=\frac{\frac{2}{1+2\cdot 0}}{e^{sen\ 0}(1+0\cdot\cos 0)}=\frac{\frac{2}{1+0}}{e^{0}(1+0\cdot 1)}=\frac{2}{1\cdot(1+0)}=2$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{x+sen\ x}}=(1+tg\ 0)^{\frac{1}{0+sen\ 0}}=(1+0)^{\frac{1}{0+0}}=1^{\infty}\Rightarrow Llamando\ L=\lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{x+sen\ x}}\Rightarrow$$

$$\ln L=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{x+sen\ x}}\right]=\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+tg\ x)^{\frac{1}{x+sen\ x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+sen\ x}\cdot\ln(1+tg\ x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+tg\ x)}{x+sen\ x}=$$

$$=\frac{\ln(1+tg\ 0)}{0+sen\ 0}=\frac{\ln(1+0)}{0+0}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{1+tg\ x}}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot}{\cos^2 x\cdot(1+tg\ x)(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot}{\cos^2 0\cdot(1+tg\ 0)(1+\cos 0)}=\frac{1\cdot}{1^2\cdot(1+0)\cdot(1+1)}=\frac{1\cdot}{1\cdot 1\cdot 2}=\frac{1\cdot}{2}\Rightarrow\ln L=\frac{1}{2}\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{x+sen\ x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

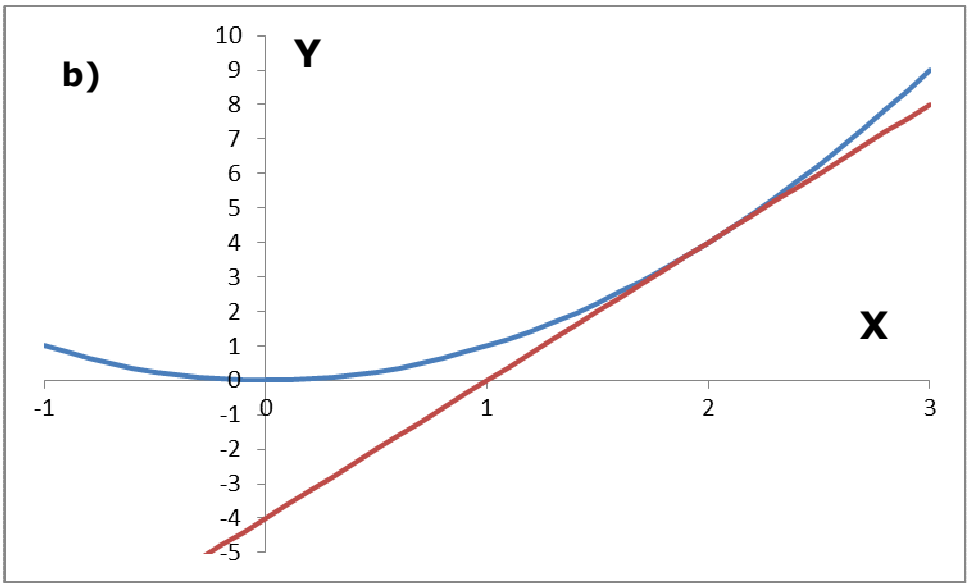
2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de ***f*(*x*) = *x*²** en el punto de abscisa ***x* = 2**. **(0,5 puntos)**

b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de ***f*(*x*),** la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. **(0,5 puntos)**

c) Calcula el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

$a)$

$$y'=2x\Rightarrow\begin{cases}y(2)=2^2=4\\ y'(2)=2\cdot 2=4\end{cases}\Rightarrow y-4=4(x-2)\Rightarrow y-4=4x-8\Rightarrow y=4x-4\Rightarrow 4x-y-4=0$$



Continuación Problema 2A de la opción A

$c)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4x - 4 = 0 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$Sabiendo\ que\ la\ ecuación\ del\ eje\ OY\ es\ x = 0$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \\ x = 0 \Rightarrow 0 = 4 \cdot x - 4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 (4x - 4)\, dx + \left| \int_0^1 (4x - 4)\, dx \right| = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) dx - \int_0^1 (4x - 4)\, dx$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^2 + 4 \cdot [x]_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^1 + 4 \cdot [x]_0^1$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(2^3 - 0^3\right) - 2 \cdot \left(2^2 - 0^2\right) + 4 \cdot (2 - 0) - 2 \cdot \left(1^2 - 0^2\right) + 4 \cdot (1 - 0) = \frac{8}{3} - 8 + 8 - 2 + 4 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}\, u^2$$

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouche-Frobenius. **(0,5 puntos)**

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - az = 5 \end{cases}$

no es incompatible para ningún valor $a \in \Re$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

a) <u>Teorema de Rouche-Fröbenius</u>

Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir: **S es compatible $\Leftrightarrow$ rang (A) = rang (A/B)**

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 9-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = 7 \cdot (2 - a) \Rightarrow Si\ A = 0 \Rightarrow 7 \cdot (2 - a) = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\forall a \in \Re - \{2\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

El sistema es **Compatible** para todo valor $a \in \Re$

4A. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$ **(1,25 puntos)**

a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a ***r*** que pasa por el punto ***P*(2 , 1 , 1). (1,25 puntos)**
b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes coordenados. **(1,25 puntos)**

a) El plano buscado π como vector director el de la recta r, que es perpendicular al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos vectores, nulo y la ecuación pedida del plano

$$3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow z = x - 1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow v_r \equiv (1\,,3\,,1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\,,y\,,z) - (2\,,1\,,1) = (x-2\,,y-1\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\,,3\,,1)\cdot(x-2\,,y-1\,,z-1) = 0 \Rightarrow x - 2 + 3y - 3 + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0$$

b) Hallaremos los puntos de corte **A**, **B** y **C** del plano hallado en a) con los ejes coordenados
Un sexto del producto mixto (escalar y vectorial) de los vectores **OA**, **OB** y **OC** es el Volumen pedido

$$\begin{cases} OX \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \alpha + 3\cdot 0 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow \alpha - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(6\,,0\,,0) \\ OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 0 + 3\cdot\beta + 0 - 6 = 0 \Rightarrow 3\cdot\beta - 6 = 0 \Rightarrow 3\cdot\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow B \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0\,,2\,,0) \\ OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 0 + 3\cdot 0 + \gamma - 6 = 0 \Rightarrow \gamma - 6 = 0 \Rightarrow \gamma = 6 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases} \Rightarrow C(0\,,0\,,6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (6\,,0\,,0) - (0\,,0\,,0) = (6\,,0\,,0) \\ \overrightarrow{OB} = (0\,,2\,,0) - (0\,,0\,,0) = (0\,,2\,,0) \\ \overrightarrow{OC} = (0\,,0\,,6) - (0\,,0\,,0) = (0\,,0\,,6) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\right| \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot 72 = 12\ u^3$$

Propuesta B

1B. Determina como dividir un segmento de **90** cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. **(2.5 puntos)**

Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es $\pi\, r^2$

Siendo **r** el radio del semicírculo y **L** el lado del triángulo rectángulo

$$\begin{cases} 90 = 2r + L \Rightarrow L = 90 - 2r \\ A = \dfrac{\pi\, r^2}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot L \cdot \pi \cdot L = \dfrac{1}{2}\cdot \pi \cdot \left(r^2 + L^2\right) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot \left[r^2 + (90-2r)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot \left(r^2 + 8100 - 360r + 4r^2\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot \left(5r^2 - 360r + 8100\right) = \frac{5}{2}\cdot \pi \cdot \left(r^2 - 72r + 1620\right) \Rightarrow A' = \frac{dA}{dr} = \frac{5}{2}\cdot \pi \cdot (2r - 72) = 5\pi \cdot (r - 36) \Rightarrow$$

$$Si\ A' = 0 \Rightarrow 5\pi \cdot (r-36) = 0 \Rightarrow r - 36 = 0 \Rightarrow r = 36 \Rightarrow A'' = \frac{d^2 A}{dr^2} = 5\pi > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Trozo\ 1 = 2\cdot r = 2\cdot 36 = 72\ cm \\ Base = L = 90 - 72 = 18\ cm \end{cases}$$

2B.- Calcula las integrales $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int x \ln x\, dx$ **(1,25 puntos por cada integral)**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)dx = 4\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\, dx - \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\int \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx - \int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = 4\int x^{3-\frac{1}{2}}\, dx - \int x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\, dx = 4\int x^{\frac{5}{2}}\, dx - \int x^{-\frac{1}{4}}\, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)dx = 4\cdot \frac{1}{\frac{5}{2}+1}\cdot x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{4}+1}\cdot x^{-\frac{1}{4}+1} = 4\cdot \frac{1}{\frac{7}{2}}\cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{3}{4}} = \frac{8}{7}\cdot \sqrt{x^7} - \frac{4}{3}\cdot \sqrt[4]{x^3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)dx = \frac{8}{7}\cdot x^3\sqrt{x} - \frac{4}{3}\cdot \sqrt[4]{x^3} + K$$

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2}\cdot x^2 = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + K$$

$$Por\ partes \Rightarrow \begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ x\, dx = dv \Rightarrow v = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

3B. a) Despeja ***X*** en la ecuación matricial ***A.X - A = 2A²***, donde ***A*** y ***X*** son matrices cuadradas de orden 3. **(1 punto)**

b) Calcula ***X***, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ **(1 punto)**

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000}. **(0,5 puntos)**

$a)$

$$A\cdot(X-I)=2A^2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot(X-I)=A^{-1}\cdot 2A^2 \Rightarrow I\cdot(X-I)=2\cdot A^{-1}A^2 \Rightarrow X-I=2A \Rightarrow X=2A+I$$

$b)$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow X=2A+I=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$c)$

$$Siendo\ |A|=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\0&-1\end{vmatrix}=-1\Rightarrow\begin{cases}|A^{101}|=|A|^{101}=(-1)^{101}=-1\\|A^{1000}|=|A|^{1000}=(-1)^{1000}=1\end{cases}$$

4B. Dados el plano $\pi\equiv x+ay+3z=2$, $a\in\Re$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x-2y+z=-1\\2x-y=0\end{cases}$

a) Halla ***a*** para que π y ***r*** se corten perpendicularmente. **(1,25 puntos)**.
b) Halla ***a*** para que π y ***r*** sean paralelos. **(1,25 puntos)**.

a) Los vectores directores de la recta y el plano que cumplen la condición de perpendicularidad son iguales o proporcionales

$$y=2x\Rightarrow x-4x+z=-1\Rightarrow z=-1+3x\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=-1+3\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,\,a\,,\,3)\\\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,\,2\,,\,3)\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{3}{3}=\frac{a}{2}\Rightarrow a=2$$

b) Si la recta y el plano son paralelos sus vectores directores son perpendiculares y, por ello, su producto escalar es nulo.