Propuesta A

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000m^3 de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado

El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado

¿Qué dimensiones debe tener el depósito?

¿Cual es el precio de dicho depósito? **(2,5 puntos)**

Siendo **B** el lado de la base del depósito y **H** la altura

$$\begin{cases} 1000 = L^2 H \Rightarrow H = \dfrac{1000}{L^2} \\ P = 200 \cdot L^2 + 100 \cdot 4 \cdot LH \end{cases} \Rightarrow P = 200 \cdot L^2 + 100 \cdot 4 \cdot L \cdot \frac{1000}{L^2} = 200 \cdot L^2 + \frac{400000}{L} \Rightarrow$$

$$P' = \frac{dP}{dL} = 400 \cdot L - \frac{400000}{L^2} = 400 \cdot \frac{L^3 - 1000}{L^2} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 400 \cdot \frac{L^3 - 1000}{L^2} = 0 \Rightarrow L^3 - 1000 = 0 \Rightarrow L^3 = 1000 \Rightarrow$$

$$L = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow P'' = \frac{d^2 P}{dL^2} = 400 \cdot \frac{3L^2 L^2 - 2L\left(L^3 - 1000\right)}{L^4} = 400 \cdot \frac{3L^3 - 2L^3 + 2000}{L^3} = 400 \cdot \frac{3L^3 + 2000}{L^3}$$

$$P''(10) = 400 \cdot \frac{3 \cdot 10^3 + 2000}{10^3} = 400 \cdot \frac{5000}{1000} = 2000 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} L = 10\ m \\ H = \dfrac{1000}{10^2} \end{cases}$$

$$\Pr ecio \Rightarrow P = 200 \cdot 10^2 + 400 \cdot 10 \cdot 10 = 20000 + 40000 = 60000\ €$$

2A. Dada la función $g(x) = (x+b)\cos x \quad b \in \Re$

a) Calcula la primitiva ***G(x)*** de ***g(x)*** que verifica que ***G*(0) = 1**. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor de $b \in \Re$ sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$ **(1,25 puntos)**

$a)$

$$G(x) = \int (x+b)\cos x\ dx = \int x \cos x\ dx + b\int \cos x\ dx = x\ sen\ x - \int sen\ x\ dx + b\ sen\ x$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x\ dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x\ dx = sen\ x \end{cases}$$

$$G(x) = x\ sen\ x - (-\cos x) + b\ sen\ x = (x+b)\ sen\ x + \cos x + K \Rightarrow G(0) = 1 \Rightarrow (0+b)\ sen\ 0 + \cos 0 + K = 1$$

$$(0+b) \cdot 0 + 1 + K = 1 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow G(x) = (x+b)\ sen\ x + \cos x$$

$b)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(x+b)\ sen\ x + \cos x - [\cos x - (x+b)\ sen\ x]}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+b)\ sen\ x + \cos x - \cos x + (x+b)\ sen\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ (x+b)\ sen\ x}{x} = \frac{2\ (0+b)\ sen\ 0}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ [sen\ x + (x+b)\cos x]}{1} = \lim_{x \to 0} 2\ [sen\ x + (x+b)\cos x] = 2\ [sen\ 0 + (0+b)\cos 0] \Rightarrow$$

$$2\ [\ 0 + b \cdot 1] = -2 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

3A. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\ y\ D=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a) ¿Que dimensión debe tener una matriz ***X*** para poder efectuar el producto matricial ***A.X .B***? **(0,5 puntos)**
b) Despeja ***X*** en la ecuación matricial ***A.X.B + C = D***. **(1 punto)**
c) Calcula la matriz ***X***. **(1 punto)**

a) Siendo la matriz **A** de orden **2 x 2**, para poder multiplicar **AX** con la matriz **B** de orden **3 x 3** tiene que ser **X** del orden **2 x 3**·

b)

$$AXB=D-C\Rightarrow A^{-1}AXB=A^{-1}(D-C)\Rightarrow IXB=A^{-1}(D-C)\Rightarrow XB=A^{-1}(D-C)\Rightarrow$$
$$XBB^{-1}=A^{-1}(D-C)B^{-1}\Rightarrow XI=A^{-1}(D-C)B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}(D-C)B^{-1}$$

$c)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1.1=1\neq 0\Rightarrow Existe\ B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot adj\ B^t\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ B^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

4A. Dada las rectas $r \equiv 2-x=y-2=\dfrac{z}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=c-3\lambda \end{cases}$ donde $c \in \Re$

a) Estudiar la posición relativa de ***r*** y ***s*** en función del parámetro $c \in \Re$. **(1,5 puntos)**
b) Hallar el punto de intersección de ***r*** y ***s*** cuando dichas rectas sean secantes. **(1 punto)**

a) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden. Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-2}{-1}=y-2=\dfrac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\mu \\ y=2+\mu \\ z=3\mu \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=c-3\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-\mu=-1+2\lambda \\ 2+\mu=-1+\lambda \\ 3\mu=c-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu=3 \\ \lambda-\mu=3 \\ 3\lambda+3\mu=c \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A/B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & c-9 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & c-9 \end{vmatrix}=-(3c-27+18)=-(3c-9)=-3c+9$$

$$Si\ |A/B|=0 \Rightarrow -3c+9=0 \Rightarrow 3c=9 \Rightarrow c=3 \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0 \Rightarrow Las\ rectas\ son\ secantes$$

$$\forall a \in \Re-\{3\} \Rightarrow |A/B|\neq 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}\neq\frac{1}{1} \Rightarrow No\ son\ proporcionales \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cruzan$$

$b)$

$Cuando\ c=-9$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 3\mu=-3 \Rightarrow \mu=-\frac{3}{3}=-1 \Rightarrow P\begin{cases} x=2-(-1) \\ y=2+(-1) \\ z=3\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ intersección \Rightarrow P(3\,,1\,,-3)$$

Propuesta B

1B. Dada la función $f(x) = 2xe^{1-x}$ se pide:

a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales **(1.25 puntos)**

b) Calcular sus puntos de inflexión. **(1,25 puntos)**

$a)$

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^{x-1}} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \textit{Existe asíntota horizontal cuando } x \to \infty$$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2(-x)}{e^{(-x)-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{e^{-x-1}} = \lim_{x \to \infty} -2xe^{x+1} = -2 \cdot \infty = \infty \Rightarrow$$

$\textit{No existe asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$

$b)$

$$f'(x) = 2\left(e^{1-x} - xe^{1-x}\right) \Rightarrow f''(x) = 2\left[-e^{1-x} - \left(e^{1-x} - xe^{1-x}\right)\right] = 2\left(-e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x}\right) = 2\left(-2e^{1-x} + xe^{1-x}\right)$$

$$f''(x) = 2e^{1-x}(-2+x) \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2e^{1-x}(-2+x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{x-2}{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$$

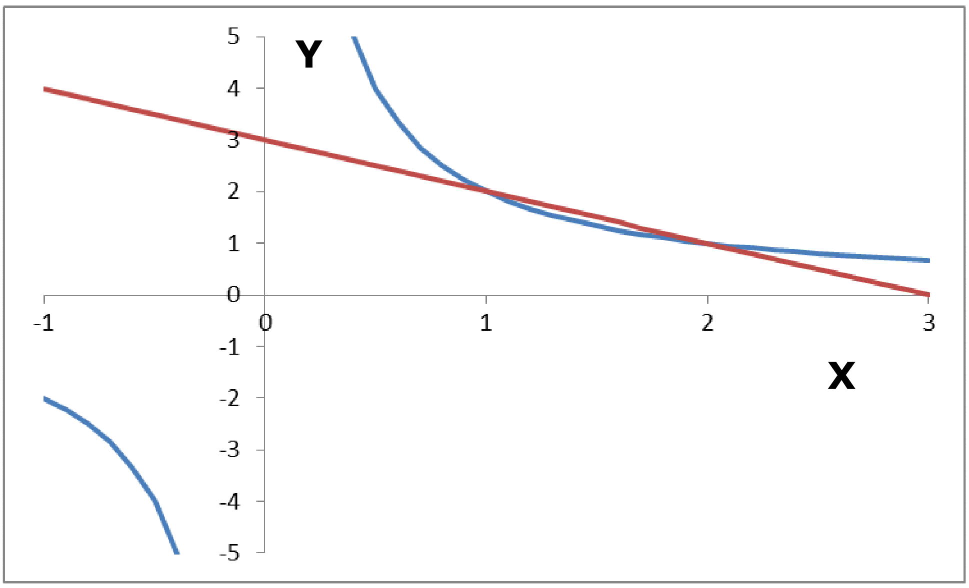
$$f'(2) = 2e^{1-2}(1-2) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} \neq 0 \Rightarrow \textit{Punto de iflexión} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{1-2} = \frac{4}{e}$$

2B.- Dada las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$ se pide:

a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de ***f(x)*** y ***g(x)***. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región anterior. **(2 puntos)**

a)



Continuación del Problema 2B de la opción B

$b)$

$$Pntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow \frac{2}{x} = 3 - x \Rightarrow 2 = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$A = \int_1^2 (3 - x)\, dx - 2\int_1^2 \frac{dx}{x} = 3 \cdot [x]_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_1^2 - 2 \cdot [\ln x]_1^2 = 3 \cdot (2 - 1) - \frac{1}{2} \cdot \left(2^2 - 1^2\right) - 2 \cdot (\ln 2 - \ln 1)$$

$$A = 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 - 2 \cdot (\ln 2 - 0) = 3 - \frac{3}{2} - 2 \cdot \ln 2 = \frac{3}{2} - \ln 2^2 = \left(\frac{3}{2} - \ln 4\right) u^2$$

3B.- a) Enuncia el Teorema de Rouche-Fröebenius. **(0,5 puntos)**
b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado. **(0,5 puntos)**

c) Determina para que valores del parámetro $a \in \Re$ el sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z + 2t = 2 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ x + 8y - 5z + 6t = a \end{cases}$ es incompatible

(1'25 puntos)

a)
<u>Teorema de Rouche-Fröbenius</u>
Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir: **S es compatible** $\Leftrightarrow$ **rang (A) = rang (A/B)**

b) Y habría que añadir**, al teorema de Rouche-Fröbenius** que para ser **Compatible Determinado** el rango de la matriz de los coeficientes **(A)** y el de la ampliada **(A/B)** además **son iguales al número de incógnitas** del sistema **S,** esto no se cumplir en este caso ya tendríamos una matriz de los coeficientes que como, máximo será de rango **3** que es menor que el número de incógnitas, por lo tanto no puedes ser Compatible Determinado

$c)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -5 & 6 & a \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -2 & 0 & a-6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$a - 5 = 0 \Rightarrow Si\ a = 5 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.Compatible\ Determiando$$

$$\forall a \in \Re - \{5\} \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

4B. Dados los planos $\pi \equiv 2x-3y+z=0$, $a \in \Re$ y la recta $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = \lambda-\mu \\ z = 2+2\lambda+\mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \Re$ y el punto ***P*(2 ,-3 , 0)**, se pide:

a) Hallar la ecuación continua de la recta ***r*** que pasa por ***P*** y es paralela a la recta ***s*** determinada por la intersección de π y π'. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el ángulo entre los planos π y π'. **(1 punto)**

a) Es una recta que tiene como vector director el de la recta intersección de los planos y que se halla como el producto vectorial de los vectores de ambos planos.
Para conocer el vector director de π' se hallará el producto vectorial de los vectores que lo engendran

$$\overrightarrow{v_{\pi'}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi'}} = (3\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{v_{\pi}} = (2\,,-3\,,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} - 9\vec{k} - 2\vec{k} - 6\vec{i} - 3\vec{j} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - 11\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-5\,,-7\,,-11)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (5\,,7\,,11) \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11}$$

$b)$

$$sen\;\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{\pi'}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{\pi'}}\right|} = \frac{\left|(3\,,1\,,-2)\cdot(2\,,-3\,,1)\right|}{\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{|6-3-2|}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{|1|}{14} = \frac{1}{14} = 0{,}07142857142857142857$$

$$\alpha = \text{arc sen}\left(\frac{1}{14}\right) = 4^{\circ}5'46''$$