Propuesta A

1A. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \Re$ se pide:

a) Determina los parámetros $a \in \Re$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f*(*x*) en su punto de inflexión sea -3. **(1,25 puntos)**

b) Para los valores del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de ***f*(*x*)**. **(1,25 puntos)**

$a)$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 6x + a \\ f''(x) = 6x + 6 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow 6x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{6} = -1 \Rightarrow Como\ f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

$$Punto\ de\ \text{inf}\ lexión\ en\ x = -1 \Rightarrow f'(-1) = -3 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + a = -3 \Rightarrow 3 - 6 + a = -3 \Rightarrow a = 0$$

$b)$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (3x + 6)\, x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ en\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 6 = -6 \\ f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ en\ x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 6 = -2 \end{cases}$$

2A. Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\, dx$ **(2,5 puntos)**

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{2} \cdot 2t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t\ dt$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\ dt = 2t\ dt \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t\ dt = [t\ sen\ t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ t\ dt = \left(\frac{\pi}{2} \cdot sen\ \frac{\pi}{2} - 0 \cdot sen\ 0\right) - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \cdot 0\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$$

$$\begin{cases} t = u \Rightarrow dt = du \\ \cos t\ dt = dv \Rightarrow v = \int \cos t\ dt = sen\ t \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t\ dt = \frac{\pi}{2} + (0 - 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \Re$

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 4 & -3 & 2 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & 0 & 2-3m \\ 1-m & 0 & m-1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-3m \\ 1-m & m-1 \end{vmatrix} = m - 1 - (1-m)(2-3m)$$

$$|A| = m - 1 + (m-1)(2-3m) = (m-1)(1+2-3m) = (m-1)(3-3m) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \\ 3 - 3m = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ m = 1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y - 2z = 1 \Rightarrow y = 1 + 2z \Rightarrow x - 1 - 2z + z = 0 \Rightarrow x = 1 + z \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1 + \lambda\ , 1 + 2\lambda\ ,\ \lambda)$$

4A. Sea ***r*** la recta determinada por el punto ***P*(1 , 0 , 1)** y el vector $\vec{v} = (1\,,-1\,,0)$

a) Calcula el punto de *r* más cercano al punto ***Q*(0 , 0 , 1)**. **(1,5 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico de ***Q*** respecto a *r*. **(1 punto)**

a) El vector QG, en donde G es el punto genérico de la recta r, es perpendicular al vector $\vec{v}$, director de ella, y, por ello, el producto escalar, de ambos vectores, es nulo.

El punto más cercano R de la recta r es, a su vez el punto medio entre Q y Q'

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{QG} = (1+\lambda\,,-\lambda\,,1) - (0\,,0\,,1) = (1+\lambda\,,-\lambda\,,0) \\ \vec{v} = (1\,,-1\,,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{QG} \perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{QG} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$$

$$(1+\lambda\,,-\lambda\,,0)\cdot(1\,,-1\,,0) = 0 \Rightarrow 1+\lambda+\lambda = 0 \Rightarrow 1+2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow R\begin{cases} x = 1+\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = -\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$R\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,1\right)$$

$b)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{0+x_{Q'}}{2} \Rightarrow x_{Q'} = 1 \\ \frac{1}{2} = \frac{0+y_{Q'}}{2} \Rightarrow y_{Q'} = 1 \\ 1 = \frac{1+z_{Q'}}{2} \Rightarrow 1+z_{Q'} = 2 \Rightarrow z_{Q'} = 1 \end{cases} \Rightarrow Q'(1\,,1\,,1)$$

Propuesta B

1B. a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. **(1 punto)**
b) Razona que la ecuación **2*e*^{x} + *x*^{5} = 0** tiene al menos una solución real. **(0,75 puntos)**
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. **(0,75 puntos)**

a)
Teorema de Bolzano
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f(c) = 0**

Teorema de Rolle
Sea **f(x)** una función continua en **[a , b]**, derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a\ , b)$ tal que **f'(c) = 0**

b) **f(x) = 2*e*^{x} + *x*^{5}** es continua en el intervalo **[0 , -2]**, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\begin{cases} sign\ \ f(-1) = e^{-1} + (-1)^5 = \dfrac{1}{e} - 1 < 0 \\ sign\ \ f(0) = e^0 + 0^5 = 1 + 0 = 1 > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **[sign f(-1) $\neq$ sign f(0)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (-1\ , 0)$ tal que **f(c) = 0** y por ello **2*e*^{c} + *c*^{5} = 0 que es una solución real**

2B. a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$ **(1,5 puntos)**

b) Calcula $c \in \Re$ para que las rectas tangentes a las gráficas de ***f(x)*** y ***g(x)*** en el punto de abscisa ***x = c*** tengan la misma pendiente. **(1 punto)**

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3 \\ x = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2} = 1 \end{cases} \\ g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 11 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 48 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{12} \\ x = 1 - \sqrt{12} \end{cases} \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ x = \dfrac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

$$0 \in (-1\,,1) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \Rightarrow f(x) \Rightarrow Positiva \\ g(0) = -0^2 + 2 \cdot 0 + 11 = 11 > 0 \Rightarrow g(x) \Rightarrow Positiva \end{cases} \Rightarrow g(x) > f(x)$$

$$2 \in (1\,,3) \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0 \Rightarrow f(x) \Rightarrow Negativa \\ g(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 11 = 11 > 0 \Rightarrow g(x) \Rightarrow Positiva \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 2x + 11\right) dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 4x + 3\right) dx + \int_{1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 11\right) dx + \left| \int_{1}^{3} \left(x^2 - 4x + 3\right) dx \right|$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 11\right) dx - \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 4x + 3\right) dx - \int_{1}^{3} \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 11\right) dx - \int_{1}^{3} \left(x^2 - 4x + 3\right) dx$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(-2x^2 + 6x + 8\right) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{-1}^{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{-1}^{3} + 8 \cdot [x]_{-1}^{3} =$$

$$A = -\frac{2}{3} \cdot \left[3^3 - (-1)^3\right] + 3 \cdot \left[3^2 - (-1)^2\right] + 8 \cdot [3 - (-1)] = -\frac{2}{3} \cdot [27 - (-1)] + 3 \cdot (9 - 1) + 8 \cdot (3 + 1)$$

$$A = -\frac{56}{3} + 24 + 32 = \frac{72 + 96 - 56}{3} = \frac{112}{3}\, u^2$$

$b)$

$$\begin{cases} f'(x) = 2x - 4 \\ g'(x) = -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x - 4 = -2x + 2 \Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

3B. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$ donde $x, y, z, a, b, c \in \Re$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(1,25 puntos por determinante)**

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x & y & z \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} + 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} + 7 \cdot 2 \cdot 0 = \frac{7}{5} \cdot 10 + 0 = 14$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 2b & 3c \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-15) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a & 2b & 3c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= 15 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = (-15) \cdot 10 = -150$$

4B. Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2$, $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$, $\pi_3 \equiv x + ay + z = a$ donde $a \in \Re$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \Re$. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor ***a* = 1**, calcular la distancia entre π_2 y π_3. **(1 punto)**

a) Si el sistema que formamos con los tres planos es compatible determinado se cortan en un punto.

Si el sistema es compatible indeterminado un plano coincide con otro y si sus vectores son iguales o proporcionales los tres serán coincidentes, de no serlo el tercer plano corta a los dos que son coincidentes.

Si el sistema es incompatible los planos son paralelos, habiendo dos posibilidades:

- Si en la matriz de coeficientes (A) dos filas cualesquiera son proporcionales y la otra no lo es, entonces *dos planos son paralelos y el otro los corta en dos rectas paralelas*

- Si no hay ningún par de filas proporcionales en la matriz de los coeficientes los planos *se cortan dos a dos en tres rectas paralelas*

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x + ay + z = a \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 1-2a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a-2 & 1-2a \\ 0 & 1-a \end{vmatrix} = (a-2)\cdot(1-a) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow (a-2)\cdot(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ 1-a=0 \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{1, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow$$
$$Se\ cor\tan\ en\ un\ punto\ los\ tres\ planos$$

$$Si\ a = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 = rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Las\ filas\ 2\ y\ 3\ de\ la\ matriz\ de\ los\ coeficientes\ son\ iguales, por\ ello\ \pi_2\ y\ \pi_3\ son\ paralelos\ y\ \pi_1\ los\ corta$$
$$según\ dos\ rectas\ paralelas.$$

$$Si\ a = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 = rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Ninguna\ fila\ es\ igual\ o\ proporcional\ por\ lo\ \tan to\ \pi_1, \pi_2\ y\ \pi_3\ se\ cor\tan\ dos\ a\ dos\ en\ tres\ rectas\ paralelas$$