

Propuesta A

1A. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $a, b \in \mathbb{R}$ se pide:

- a) Calcula razonadamente los parámetros **a** y **b** para que $f(x)$ sea derivable en toda $\mathbb{R}$ **(1,5 puntos)**
 b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba, si para los valores hallados en el apartado anterior la función **f(x)** verifica la hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$. **(1 punto)**

a) Para que una función sea derivable, inicialmente tiene que ser continua y después tener la misma derivada en el posible punto de discontinuidad, en este caso **x = 2**

$$\begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 + a = 4 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2^2 + b \cdot 2 - 9 = 2b - 13 \end{cases} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 4 + a = 2b - 13 \Rightarrow a - 2b + 17 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 2 \cdot 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -2 \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \Rightarrow 4 = -4 + b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow$$

$$a - 2 \cdot 8 + 17 = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

b) Teorema de Rolle

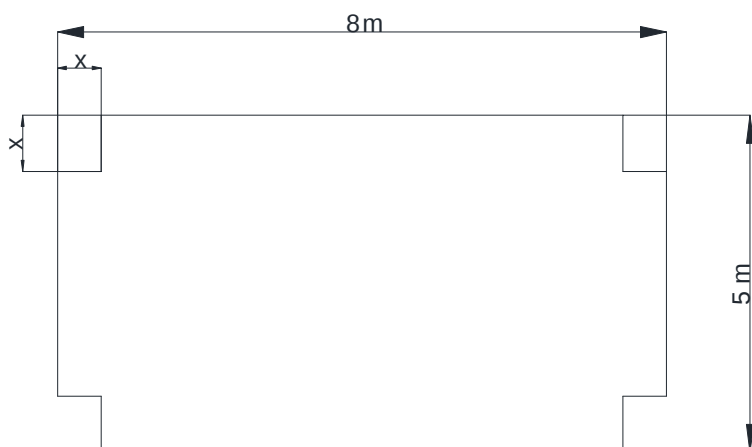
Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que verifica que $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

La función **f(x)** es una función continua en **[-2, 6]**, derivable en **(-2, 6)** y que verifica que

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \\ f(6) = -6^2 + 8 \cdot 6 - 9 = -36 + 48 - 9 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(6); \text{ entonces existe, al menos, un punto}$$

$$c \in (-2, 6) \text{ tal que } f'(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 < 2 \\ -2x + 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 < 6 \end{cases} \text{ Se cumple en } \mathbf{x = 0} \text{ y } \mathbf{x = 4}$$

2A. Con una chapa metálica de 8 x 5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón **(2,5 puntos)**



$$V = (8 - 2x)(5 - 2x)x = (40 - 16x - 10x + 4x^2)x = 40x - 26x^2 + 4x^3 \Rightarrow V' = \frac{dV}{dx} = 40 - 52x + 12x^2 \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow$$

$$40 - 52x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 10 - 13x + 3x^2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 3 = 169 - 120 = 49 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{13+7}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ x = \frac{13-7}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow V'' = \frac{d^2V}{dx^2} = -13 + 6x \Rightarrow \begin{cases} V''\left(\frac{10}{3}\right) = -13 + 6 \cdot \frac{10}{3} = -13 + 20 = 7 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ V''(1) = -13 + 6 \cdot 1 = -13 + 6 = -7 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

$$x = 1 \text{ m}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2+a & 0 & -a+1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2+a & 1-a \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot (1-a) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-a = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Continuación del Problema 3A de la Propuesta ASi $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

b)

Si $a = -1 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow -x = -8 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow 8 + 2z = -7 \Rightarrow 2z = -15$$

$$z = -\frac{15}{2} \Rightarrow -8 - y + \left(-\frac{15}{2}\right) = -5 \Rightarrow y = -8 + 5 - \frac{15}{2} = -3 - \frac{15}{2} = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(8, -\frac{21}{2}, -\frac{15}{2}\right)$$

4A. Dado el punto $P(2, 0, -1)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Determina, razonadamente, la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y s . **(1 punto)**

a) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y las rectas se confunden. Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de las rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \\ x = -1 - z \Rightarrow -1 - z - y + 2z + 4 = 0 \Rightarrow y = 3 + z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = -1 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 3 + \mu \\ z = 0 = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 3 \\ 2\lambda - \mu = 4 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 6) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Son paralelas o se cruzan}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \text{No son paralelas}$$

Las rectas r y s se cruzan

Continuación del Problema 4A de la Propuesta A

b) El vector director del plano π es perpendicular a los vectores directores de las rectas r y s , calculándose como el producto vectorial de estos dos vectores.

El vector $\overrightarrow{PG}$, donde G es el punto genérico del plano es perpendicular al vector director hallado y su producto escalar es nulo

La combinación del producto vectorial por el producto escalar es el producto misto de los tres vectores que tiene que ser nulo y la ecuación del plano pedido

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 2, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (2, 0, -1) = (x-2, y, z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot (x-2) - (z+1) + 2 \cdot (z+1) + y = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x-2) + y + (z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

5A. a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**

a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

(0,5 puntos)

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**

b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

Solución (a) Diagrama de árbol con Probabilidad Total y Bayes

a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

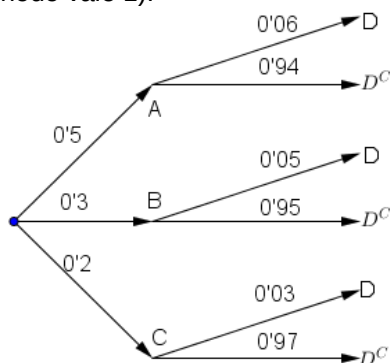
a1)

Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

Llamemos A, B, C, D y D^C , a los sucesos siguientes, "operario A", "operario B", "operario C", "resistencia defectuosa" y "resistencia no defectuosa", respectivamente.

Datos del problema $p(A) = 50\% = 0'5$; $p(B) = 30\% = 0'3$; $p(C) = 20\% = 0'2$; $p(D/A) = 6\% = 0'06$; $p(D/B) = 5\% = 0'05$; $p(D/C) = 3\% = 0'03$...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :

$$\begin{aligned} \mathbf{p(\text{resistencia defectuosa})} &= \mathbf{p(D)} = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C) = \\ &= (0'5) \cdot (0'06) + (0'3) \cdot (0'05) + (0'2) \cdot (0'03) = \mathbf{51/1000 = 0'051}. \end{aligned}$$

a2)

Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

Continuación del problema 5A

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(si es defectuosa, que proceda del operario A; es una probabilidad condicionada) =

$$= p(A/D) \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{p(A) \cdot p(D/A)}{p(D)} = \frac{(0'5) \cdot (0'06)}{0'051} = 10/17 \cong 0'58824.$$

Solución (b) BINOMIAL

b)

Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1)

Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

Definición de distribución binomial:

Recordamos que si realizamos n veces un experimento en el que podemos obtener éxito, A , con probabilidad p y fracaso, A^c , con probabilidad q ($q = 1 - p$), decimos que la variable aleatoria discreta X sigue una distribución binomial de parámetros n y p , y lo representaremos por $X \rightarrow B(n;p)$.

En este caso *la probabilidad de obtener k éxitos*, que es su función de probabilidad, viene dada por:

$$p(X = k) = (n \text{ sobre } k) \cdot p^k \cdot q^{(n-k)} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}.$$

****** $(n \text{ sobre } k) = \binom{n}{k} = (n!)/(k! \cdot (n-k)!)$ en la calculadora “ n tecla **nCr** k ”

$n!$ = factorial de un $n^\circ = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Por convenio $0! = 1$, para poder demostrar las propiedades.

b1)

Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

En nuestro caso $X \rightarrow B(n;p) = B(5;0'3)$, pues del apartado (a), $p = p(B) = 30\% = 0'3$.

Me piden $p(X = 3) = (5 \text{ sobre } 3) \cdot (0'3)^3 \cdot (0'7)^{(5-3)} = \binom{5}{3} \cdot (0'3)^3 \cdot (0'7)^2 = 0'1323$.

Sin embargo *mirando directamente en las tablas de la binomial* vemos que **$p(X = 3) = 0'1323$** .

b2)

Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B.

Me piden $p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = \{\text{es más rápido por el suceso contrario}\} = 1 - p(X < 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] = \{\text{mirando en las tablas}\} = 1 - [0'1681 + 0'3602] = 0'4717$.

Propuesta B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x}$

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} &= \frac{(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4}{(-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 4} = \frac{-8 + 3 \cdot 4 - 4}{-8 + 5 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 4} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{3x^2 + 10x + 8} = \frac{3(-2)^2 + 6(-2)}{3(-2)^2 + 10(-2) + 8} = \frac{3 \cdot 4 - 6 \cdot 2}{3 \cdot 4 - 10 \cdot 2 + 8} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6x + 6}{6x + 10} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(3x + 2)}{2(3x + 5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 2}{3x + 5} = \frac{3(-2) + 2}{3(-2) + 5} = \frac{-6 + 2}{-6 + 5} = \frac{-4}{-1} = 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} &= \frac{0 \cdot \ln(0+1)}{2 - 2 \cos 0} = \frac{0 \cdot \ln(1)}{2 - 2 \cdot 1} = \frac{0 \cdot 0}{2 - 2} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \cdot x}{-2 \cdot (-\sin x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2 \sin x} = \frac{\ln(0+1) + \frac{0}{0+1}}{2 \cdot \sin 0} = \frac{\ln(1) + \frac{0}{1}}{2 \cdot 0} = \frac{0+0}{0} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+2}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2(x+1)^2 \cos x} = \\ &= \frac{0+2}{2(0+1)^2 \cos 0} = \frac{2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

2B. Dada las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas **(1,5 puntos)**

b) Encuentre razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

a)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 20 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = -x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < 1 + \sqrt{5} \\ -1 < 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$1 \in (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1^2 = -1 < 0 \Rightarrow f(x) \Rightarrow \text{Negativa} \\ g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = -5 < 0 \Rightarrow g(x) \Rightarrow \text{Negativa} \end{cases} \Rightarrow g(x) < f(x)$$

$$A = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 4) dx \right| - \left| \int_{-1}^2 (-x^2) dx \right| = - \int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 4) dx + \int_{-1}^2 (-x^2) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

$$A = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-1}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^2 + 4 \cdot [x]_{-1}^2 = -\frac{2}{3} \cdot [2^3 - (-1)^3] + [2^2 - (-1)^2] + 4 \cdot [2 - (-1)]$$

$$A = -\frac{2}{3} \cdot [8 - (-1)] + (4 - 1) + 4 \cdot (2 + 1) = -6 + 3 + 12 = 9 \text{ u}^2$$

b)

$$g'(x) = 2x - 2$$

$$\begin{cases} g(-3) = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 4 = 9 + 6 - 4 = 11 \\ g'(-3) = 2 \cdot (-3) - 2 = -8 \end{cases} \Rightarrow m_{\text{normal}} = -\frac{1}{g'(-3)} = -\frac{1}{-8} = \frac{1}{8} \Rightarrow y - 11 = \frac{1}{8} \cdot (x + 3) \Rightarrow$$

$$8y - 88 = x + 3 \Rightarrow x - 8y + 91 = 0 \Rightarrow y = \frac{x + 91}{8}$$

3B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? I_3 es la matriz identidad de orden 3 (**1punto**)

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - XB$ (**1,5 puntos**)

a) Para que una matriz tenga inversa debe de cumplirse que su determinante no sea nulo

$$2I_3 + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|2I_3 + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow 2I_3 + B \text{ tiene inversa}$$

b)

$$2X + XB + C = A \Rightarrow X(2I_3 + B) = A - C \Rightarrow X(2I_3 + B)(2I_3 + B)^{-1} = (A - C)(2I_3 + B)^{-1} \Rightarrow$$

$$XI_3 = (A - C)(2I_3 + B)^{-1} \Rightarrow X = (A - C)(2I_3 + B)^{-1}$$

$$(2I_3 + B)^{-1} = \frac{1}{|2I_3 + B|} \cdot \text{adj}[(2I_3 + B)^t] \Rightarrow (2I_3 + B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}[(2I_3 + B)^t] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2I_3 + B)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = (A - C)(2I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos **P(0, 1, -2)** y **Q(4, -3, 0)** **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidista de **P** y **Q** y que pertenece a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

a) El vector director de la recta es el vector **PQ**, este vector y uno cualquiera de los puntos dados (elegiremos el punto **P**) determinan la ecuación de la recta **s**

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (4, -3, 0) - (0, 1, -2) = (4, -4, 2) \equiv (2, -2, 1) \Rightarrow \frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-(-2)}{1}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z+2$$

b) La distancia del punto **R**, genérico de la recta **r**, a los puntos **P** y **Q** son iguales, por lo tanto lo son los módulos de los vectores **PR** y **QR**

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (2 + \lambda, -\lambda, -5) - (0, 1, -2) = (2 + \lambda, -\lambda - 1, -3) \\ \overrightarrow{RQ} = (2 + \lambda, -\lambda, -5) - (4, -3, 0) = (-2 + \lambda, 3 - \lambda, -5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(2 + \lambda)^2 + (-\lambda - 1)^2 + (-3)^2} \\ |\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-5)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RQ}| \Rightarrow \sqrt{(2 + \lambda)^2 + (-\lambda - 1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-5)^2} \Rightarrow$$

$$(2 + \lambda)^2 + (-\lambda - 1)^2 + (-3)^2 = (\lambda - 2)^2 + (3 - \lambda)^2 + (-5)^2 \Rightarrow$$

$$4 + 4\lambda + \lambda^2 + 1 + 2\lambda + \lambda^2 + 9 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 25 \Rightarrow 2\lambda^2 + 6\lambda + 14 = 2\lambda^2 - 10\lambda + 38 \Rightarrow$$

$$6\lambda + 14 = -10\lambda + 38 \Rightarrow 16\lambda - 24 = 0 \Rightarrow 16\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow R\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta.

(0,5 puntos)

Solución (a) Diagrama de árbol, Probabilidad Total y Fórmula de Bayes

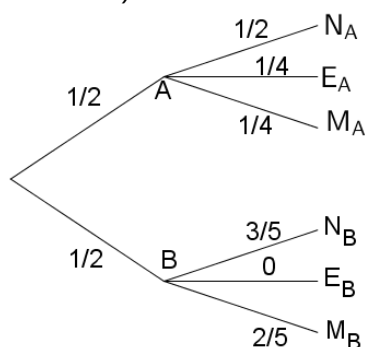
a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas

Llamemos A, B, N_A, E_A, M_A, N_B, E_B, M_B, y M, a los sucesos siguientes, "libro de la estantería A", "libro de la estantería B", "Novela de la estantería A", "Ensayo de la estantería A", "libro de Matemáticas de la estantería A", "Novela de la estantería B", "Ensayo de la estantería B", "libro de Matemáticas de la estantería B" y "el libro es de matemáticas"....., respectivamente.

Datos del problema $p(A) = p(B) = 1/2 = 0'5$; $p(N_A) = 20/(20+10+10) = 1/2 = 0'5$; $p(E_A) = p(M_A) = 10/(20+10+10) = 1/4 = 0'25$; $p(N_B) = 12/(12+8) = 3/5 = 0'6$; $p(E_B) = 0/20 = 0$, $p(M_B) = 8/(12+8) = 2/5 = 0'4$

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :

$$p(\text{el libro elegido sea de matemáticas}) = p(M) = p(A) \cdot p(M_A/A) + p(B) \cdot p(M_B/B) = (1/2) \cdot (1/4) + (1/2) \cdot (2/5) = 13/40 = 0'325.$$

a2)

Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B, ss condicionada) =

$$p(B/M) = \frac{p(B \cap M)}{p(M)} = \frac{p(B) \cdot p(M_B/B)}{p(M)} = \frac{(1/2) \cdot (2/5)}{0'325} = 8/13 \approx 0'6154.$$

Solución (b) NORMAL

b)

El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

Distribución normal de media μ y desviación típica σ

Recordamos que una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ , y se designa por $N(\mu, \sigma)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1ª La variable X recorre toda la recta real, es decir $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

2ª La función de densidad, es: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ (su gráfica es la campana de Gauss) donde:

$e = 2,7182\dots$, constante: base de los logaritmos neperianos

$\pi = 3,1415\dots$ relación de la longitud de una circunferencia a su diámetro

x = abscisa, valor cualquiera de un punto del intervalo.

μ = media de la variable aleatoria X (parámetro).

σ = desviación típica de la variable aleatoria X (parámetro).

$f(x)$ = ordenada de la curva.

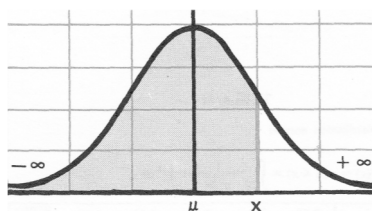
A los valores μ y σ se los denomina parámetros de la distribución normal.

Distribución normal estándar

De las infinitas distribuciones $N(\mu, \sigma)$, tiene especial interés la distribución $N(0,1)$; es decir, aquella que tiene por media el valor cero ($\mu = 0$) y por desviación típica la unidad ($\sigma = 1$). Esta distribución se llama *ley normal estándar*, o bien *distribución normal reducida*.

La función de densidad para $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ es: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, cuya representación gráfica es parecida a la de la normal $N(\mu; \sigma)$, pero un poco mas achatada.

La función de distribución $F(x)$ de la ley normal estándar proporciona el área del recinto sombreado de la figura.



Recordamos que la función de distribución es $F(x) = p(X \leq x)$, en el caso de la normal, la variable siempre es “z” no “x”, y se escribe $F(z) = p(Z \leq z) = \Phi(z)$.

Tipificación de la variable

Realizando el cambio de variable $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, llamado *tipificar la variable*, cualquier variable aleatoria

continua X que sigue una $N(\mu, \sigma)$ se puede transformar en la variable aleatoria continua Z que sigue una normal $N(0,1)$, que es la que viene tabulada en la tabla que nos han dado.

b1)

Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos.

Tenemos $X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(15, 5)$

Me piden $p(X \leq 13) = \{ \text{tipifico } Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \} = p\left(Z \leq \frac{13 - 15}{5}\right) = p(Z \leq -0.40) = 1 - p(Z \leq 0.40) = \{ \text{mirando}$

la probabilidad en la tabla de la $N(0,1) \} = 1 - 0.6554 = 0.3446$.

b2)

¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33% de los usuarios? Razona la respuesta.

Sabemos que en la tabla de la $N(0,1)$ nos dan sólo probabilidades $p(Z \leq z_0)$.

Me dicen que $p(X > x_0) = 33\% = 0.3333$, teniendo en cuenta el suceso contrario **$p(Z > z_0) = 1 - p(Z \leq z_0) = 0.3333$** , de donde **$p(Z \leq z_0) = 1 - 0.3333 = 0.6667$** .

La probabilidad 0.6667 no viene en la tabla y la más próxima es 0.6664 que corresponde a **$z_0 = 0.43$** .

Tipificando veremos cuantos usuarios superan el 33%

De $z_0 = \frac{x - \mu}{\sigma}$ tenemos $0.43 = \frac{x - 15}{5}$, de donde $x = 0.43 \cdot 5 + 15 = 17.15$ minutos. **Resumiendo los**

minutos de espera son 17.15, es decir 2.5 minutos más de la media 15.