

Propuesta A

1. Queremos realizar una inversión en dos tipos de acciones con las siguientes condiciones: Lo invertido en las acciones de tipo A no puede superar los 10000 euros. Lo invertido en las acciones de tipo B no puede superar los 8000 euros. La suma de la cantidad invertida en A y de la cantidad invertida en B no puede exceder de 15000 euros. La rentabilidad esperada para las acciones de tipo A es del 1 % y la esperada para la acciones de tipo B es del 5 %.

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina la cantidad que debemos invertir en cada uno de los dos tipos de acciones para que, con las condiciones expuestas, el beneficio sea máximo. (0.5 puntos)

2. Un grupo de estudiantes para financiar su viaje de fin de curso vende para el día de San Valentín claveles amarillos, blancos y rojos, por un importe de 1, 2 y 3 euros respectivamente. Han vendido 900 claveles en total y han recaudado 1600 euros. Siendo el número de claveles blancos vendidos la mitad del total de rojos y amarillos.

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita saber cuántos claveles de cada color han vendido. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. La función $G(t) = t^2 - 8t + 20$, $0 \leq t \leq 6$, representa las ganancias, en miles de euros, de una empresa durante los últimos 6 meses, siendo t el tiempo medido en meses.

a) ¿Cuál fue la ganancia obtenida en el segundo mes ($t = 2$)? (0.25 puntos)

b) ¿Cuándo la ganancia obtenida fue mínima? ¿Cuál fue su valor? (1.25 puntos)

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - t & \text{si } x \leq 0 \\ |x-2| - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Se pide:

a) Hallar el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 punto)

5. Según un estudio, el 30 % de las familias españolas van al cine regularmente, el 25 % leen regularmente, y el 15 % hacen las dos cosas.

a) Si elegimos una familia al azar y va al cine regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esa familia lea regularmente? (0.75 puntos)

b) Se selecciona una familia al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esa familia vaya al cine o lea regularmente? (0.75 puntos)

6. Se sabe que “la cantidad de glucosa en la sangre” en individuos adultos y sanos sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 20 mg/dl. Se eligió aleatoriamente una muestra de 100 personas, siendo la media de la cantidad de glucosa en sangre para esta muestra de 85 mg/dl. Se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional de “la cantidad de glucosa en sangre”. (1 punto)

b) Discute razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

1. a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $2 \cdot I + 3 \cdot X + X \cdot A = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad). (0.75 puntos)

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 puntos)

2. Una compañía de autobuses oferta viajes a tres destinos diferentes: Roma, París y Lisboa. La compañía dispone de 30 autobuses. El número de autobuses que van a París es el doble de la suma de los que van a Roma y a Lisboa. Y el número de autobuses que van a Lisboa es la cuarta parte del número total de autobuses que van a Roma y a París.

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita obtener el número de autobuses que van a Roma, París y Lisboa respectivamente. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$. Calcula los valores de las constantes a , b y c para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -6)$, tenga un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, y un punto de inflexión en $x = 1$. (1.5 puntos)

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ |2x^3 - 2| - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Se pide:

a) Estudia su continuidad en $x = 0$. (0.5 puntos)

b) Extremos relativos en el intervalo $(-6, 0)$. (0.5 puntos)

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en $(-\infty, 0)$. (0.5 puntos)

5. Una empresa tiene dos líneas de producción. La línea 1 produce el 60 % de los artículos y el resto los produce la línea 2. Sabemos que el 0.5 % de los artículos producidos por la línea 1 tiene algún defecto y así mismo el 2 % de los artículos producidos por la línea 2 son defectuosos.

a) Elegido un artículo al azar, calcula la probabilidad de que sea defectuoso. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un artículo tiene defectos, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la línea 2? (0.75 puntos)

6. En un establecimiento de comida rápida se sabe que el tiempo que emplean en comer sus clientes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 7 minutos. El tiempo que emplearon 10 clientes elegidos aleatoriamente fue de 15, 20, 28, 21, 26, 30, 16, 18, 35 y 27 minutos respectivamente. Se pide:

a) Halla el intervalo de confianza para la media del tiempo que tardan en comer los clientes del establecimiento con un nivel de confianza del 97 %. (1.25 puntos)

b) ¿Cuál debería ser como mínimo el tamaño de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 2 minutos con el mismo nivel de confianza? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

1A.- Solución:

a) Llamemos A a la cantidad de euros invertida en acciones tipo A, y B a la cantidad invertida en las de tipo B, tenemos que:

$$\begin{cases} 0 \leq A \leq 10000 \\ 0 \leq B \leq 8000 \\ A + B \leq 15000 \end{cases}$$

y el dibujo de la región factible es (unidades en miles de €).

$$R(A, B) = A/100 + 5B/100$$



b) $R(7,8) = \frac{7000}{100} + \frac{5 \cdot 8000}{100} = 70 + 400 = 470€$. Las cantidades a invertir son 7000 y 8000€ respectivamente y el rendimiento máximo 470€.

2A.- Solución:

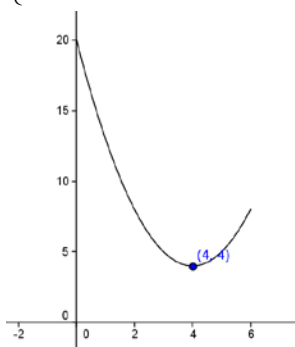
Llamemos a , b y r al número de claveles de cada color. Planteamos y resolvemos

$$\begin{cases} a + b + r = 900 \\ a + 2b + 3r = 1600 \\ b = \frac{1}{2}(a + r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + r = 900 \\ a + 2b + 3r = 1600 \\ -a + 2b - r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 900 \Rightarrow b = 300 \\ a + r = 600 \\ a + 3r = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 200 \\ a = 400 \end{cases}$$

Hemos utilizado las ecuaciones 1ª y 3ª para obtener b por reducción; después sustituimos su valor en la 1ª y 2ª y obtenemos a y r del mismo modo.

3A.- Solución:

$$\begin{cases} G(t) = t^2 - 8t + 20 \\ G'(t) = 2t - 8 \\ G''(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(2) = 4 - 16 + 20 = 8 \text{ miles de } € \\ G'(t) = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ (el cuarto mes)} \\ G''(4) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo en } (4, G(4)) = (4, 4 \text{ mil } €) \end{cases}$$

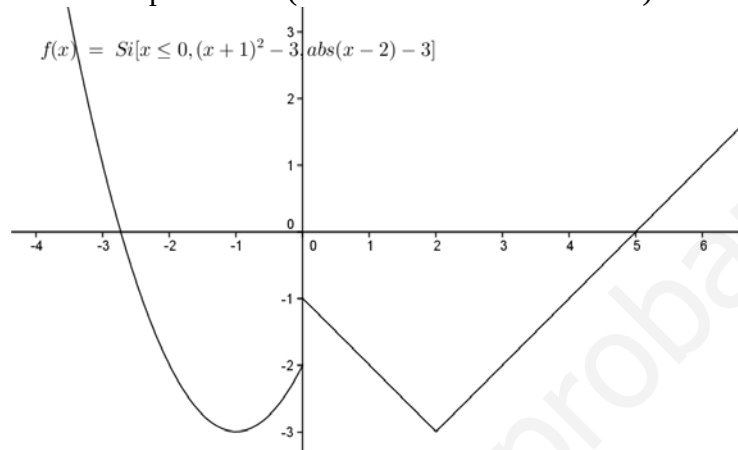


4A.-Solución:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - t & \text{si } x \leq 0 \\ |x-2| - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 - t \\ \text{el límite por la izda en 0 es } 1 - t \\ \text{el límite por la dcha es } -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{para ser continua en 0} \\ 1 - t = -1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

El primer trozo es una parábola, para $t=3$ es una parábola de vértice $(-2,-3)$

El segundo trozo es una especie de v (valor absoluto de una recta).



5A.- Solución:

Llamemos C al suceso ir al cine regularmente y L al suceso leer regularmente.

$$A) p(L/C) = \frac{P(L \cap C)}{p(C)} = \frac{15\%}{30\%} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$b) p(L \cup C) = p(L) + p(C) - p(L \cap C) = 30\% + 25\% - 15\% = 40\% = 0,4$$

6A.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en}$$

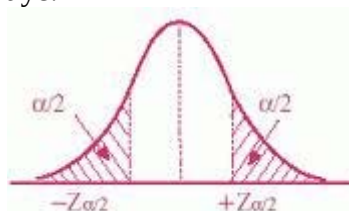
nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 85 mg/dl; σ la desviación típica, ahora 25 mg/dl; n el tamaño de la muestra, 100.

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$ ya que $(1 - 0,025 = 0,975)$. Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(85 - 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 85 + 1,96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = (81,08, 88,92)$$

b) Al aumentar el nivel de confianza el intervalo aumenta porque se trata de calcular un intervalo que abarca una zona más grande bajo la curva normal $N(0,1)$, pero tenemos menos precisión en la determinación de la media. Y al revés si el nivel de confianza disminuye, el intervalo disminuye.



1B.- Solución:

$$2 \cdot I + 3 \cdot X + X \cdot A = B \Rightarrow 3 \cdot X + X \cdot A = B - 2 \cdot I \Rightarrow 3 \cdot I \cdot X + X \cdot A = B - 2 \cdot I \Rightarrow$$

a) $X \cdot (3 \cdot I + A) = B - 2 \cdot I \Rightarrow X = (B - 2 \cdot I) \cdot (3 \cdot I + A)^{-1}$

Hemos aplicado las propiedades de las operaciones con matrices. X se podrá obtener así cuando exista la inversa de $3 \cdot I + A$

$$A \cdot X = I \Rightarrow X = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = X$$

2B.- Solución:

Llamemos R, P y L al número de autobuses que va a cada una de las ciudades

a)

$$\begin{cases} R + P + L = 30 \\ P = 2(R + L) \\ L = \frac{1}{4}(R + P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + P + L = 30 \\ -2R + P - 2L = 0 \\ -R - P + 4L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5L = 30 \Rightarrow L = 6 \\ -2R + P = 12 \\ -R - P = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 6 \\ R = 4 \\ P = 20 \end{cases}$$

El primer sistema es el planteamiento. Los siguientes pasos dan la solución. Hemos usado la 1ª y 3ª ecuaciones para hallar L por reducción, después sustituimos el valor hallado en la 2ª y 3ª y hallamos R de la misma manera. Luego P es fácil.

3B.- Solución:

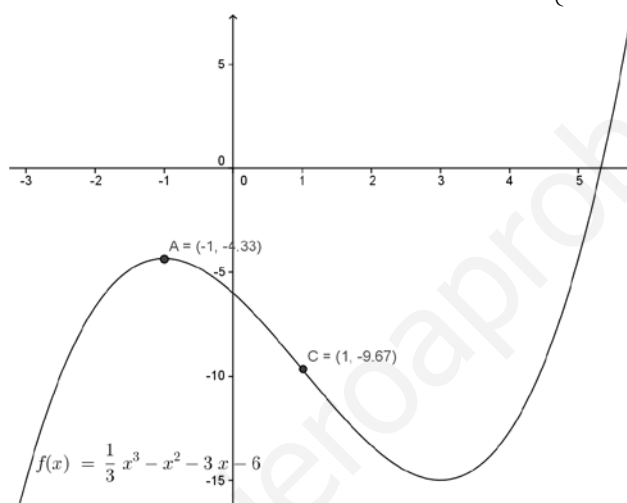
Tendremos en cuenta donde debe anularse la primera derivada para el máximo y donde la segunda para el punto de inflexión

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c \\ f(0) = -6 \end{array} \right. \Rightarrow c = -6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = x^2 + 2ax + b \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 1 - 2a + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 + b = 0 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 6 \\ f'(x) = x^2 - 2x - 3 \\ f''(x) = 2x - 2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(x) = 2x + 2a \\ f''(1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$$

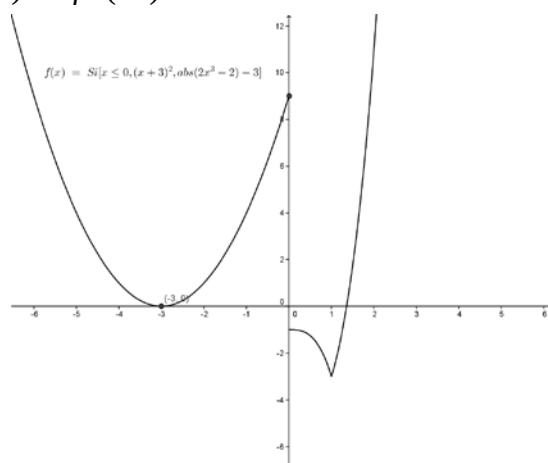
$$\begin{aligned} f''(-1) &= -4 < 0 = \text{Máx}(-1, \frac{-13}{3}) \\ f'''(1) &= 2 \neq 0 \Rightarrow P..I.(1, \frac{-29}{3}) \end{aligned}$$



4B.- Solución:

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ |2x^3 - 2| - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 9 \\ \text{Límite de } f(x) \text{ cuando } x \rightarrow 0^- \text{ es } 9 \\ \text{Límite de } f(x) \text{ cuando } x \rightarrow 0^+ \text{ es } -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \\ \text{no es continua en } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+3) \text{ en } (-6, 0) \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ cuando } x = -3 \\ f''(x) &= 2 > 0 \text{ en } (-6, 0) \Rightarrow f''(-3) = 2 > 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{Mínimo en } (-3, f(-3)) = (-3, 0)$$



$f'(x) < 0$ en $(-\infty, -3)$ luego decreciente en $(-\infty, -3)$; $f'(x) > 0$ en $(-3, 0)$ luego $f(x)$ creciente en $(-3, 0)$

5B.- Solución:

Llamemos L1 al suceso ser de la línea 1, L2 al ser de la línea 2 y D ser defectuoso

$$p(D) = p((L1 \cap D) \cup (L2 \cap D)) = p(L1 \cap D) + p(L2 \cap D) =$$

$$a) \quad p(L1) \cdot p(D/L1) + p(L2) \cdot p(D/L2) = 60\% \cdot 0,5\% + 40\% \cdot 2\% = \frac{30 + 80}{10000} = \frac{110}{10000} = 1,1\%$$

$$b) \quad p(L2/D) = \frac{p(L2 \cap D)}{p(D)} = \frac{p(L2) \cdot p(D/L2)}{p(D)} = \frac{40\% \cdot 2\%}{1,1\%} = \frac{8}{11} = 0,7273 = 72,73\%$$

6B.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,97 en}$$

nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora $23,6 = (15 + \dots + 27)/10$; σ la desviación típica, ahora 7; n el tamaño de la muestra, 10.

$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha/2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$ ya que $(1 - 0,015 = 0,985)$. Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(23,6 - 2,17 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}, 23,6 + 2,17 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}\right) = (18,797, 28,403)$$

$$b) \quad E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n > \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n > \left(2,17 \cdot \frac{7}{2}\right)^2 = 57,68 \Rightarrow n = 58$$