Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2013)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *Considera el siguiente problema de programación lineal:*

Maximiza la función $z = x + 3y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$\begin{array}{lll} -x+y & \leq & 2 \\ x+y & \leq & 4 \\ x \geq 0 & & \\ y \geq 0 & & \end{array}$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. *En un departamento de una empresa internacional trabajan 18 personas de tres nacionalidades: franceses, ingleses y alemanes. El número de empleados franceses es igual al doble del número que resulta al sumar el número de ingleses y alemanes. Y el número de alemanes es el doble del número de ingleses.*

a) Plantea el sistema que permita obtener el número de trabajadores de cada nacionalidad. (1.5 puntos)

b) Resuelve el problema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \leq 2 \\ (x-4)^2+1 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t *para que* f *sea continua en* $x = 2$*. (0.5 ptos)*

b) Para $t = 0$*, representa gráficamente la función* f*. (1 pto)*

4. *a) Calcula el valor del parámetro* a *para que la función* $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 12x + 5$ *tenga un mínimo en el punto de abscisa x=1.(0.75 puntos).*

b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, halla el máximo relativo de la función anterior. (0.75 puntos)

5. *Una empresa sabe que la probabilidad de que un ordenador tenga virus es 0.9. Dicha empresa tiene tres ordenadores independientes.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres ordenadores tengan virus? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los tres ordenadores tenga virus? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los tres ordenadores tenga virus? (0.5 puntos)

6. *La concentración de ácido úrico en sangre, en mujeres sanas, se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica 1 mg/dl. Se seleccionan al azar 100 mujeres y, mediante un análisis, se observa que la concentración media de ácido úrico en la muestra estudiada es de 3.5 mg/dl.*

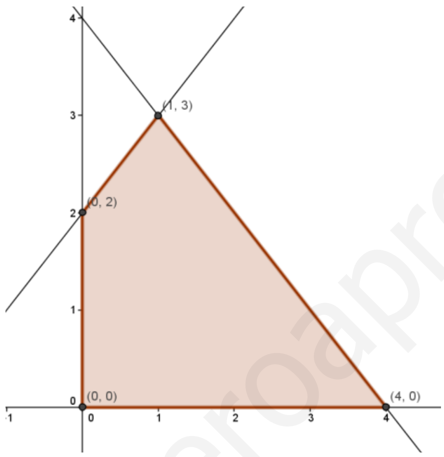
a) Halla un intervalo de confianza para la media de la concentración de ácido úrico en las mujeres con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

A1.- Solución:

$$\begin{cases} -x+y\le 2 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=x+2 \\ y=-x+4 \end{cases} \Rightarrow x+2=-x+4 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(1,3)=1+9=10 \\ \text{Solución óptima} \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow z(0,2)=0+6=6 \\ \begin{cases} y=-x+4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow z(4,0)=4+0=4 \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$



A2.- Solución

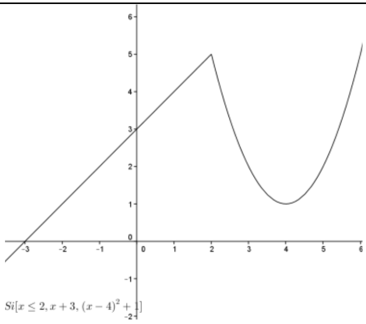
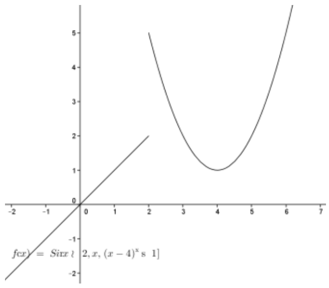
Llamemos F al nº de franceses, I al nº de ingleses y A al nº de alemanes

$$\begin{cases} F+I+A=18 \\ F=2(I+A) \\ A=2I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F=18-(I+A) \\ 18-(I+A)=2(I+A) \Rightarrow 18-(I+2I)=2(I+2I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18-3I=6I \\ I=2 \\ A=4 \\ F=12 \end{cases}$$

A3.- Solución:

$$a)\, f(x)=\begin{cases} x+t \;si\; x\le 2 \\ (x-4)^2+1 \,si\; x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2)=2+t \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x+t=2+t \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-4)^2+1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para continua en x = 2} \\ 2+t=5 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

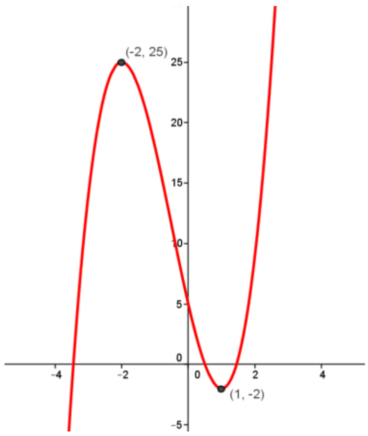
$$b)\, f(x)=\begin{cases} x \;si\; x\le 2 \text{ es una recta} \\ (x-4)^2+1 \,si\; x>2 \text{ es una parábola de vértice } (4,1) \end{cases}$$

 t=3 para continua en x=2	 Gráfica de f(x) cuando t=0

A4.- Solución:

Si en un punto se anula la derivada primera y la segunda es positiva entonces hay un mínimo.

$$f(x)=ax^3+3x^2-12x+5 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(x)=3ax^2+6x-12 \end{cases} \Rightarrow 3a+6-12=0 \Rightarrow a=2 \\ f'(x)=6x^2+6x-12 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=0 \text{ para} \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \\ f''(x)=12x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''(1)=18>0 \text{ Mínimo en } (1,f(1)) \\ f''(-2)=-18<0 \text{ Máximo en } (-2,f(-2)) \end{cases} \\ f(1)=-2 \Rightarrow \text{Mínimo en } (1,-2) \\ f(-2)=25 \Rightarrow \text{Máximo en } (-2,25) \end{cases}$$



A5.- Solución

Consideremos los tres sucesos siguientes: A, el primer ordenador tiene virus, B, el segundo ordenador tiene virus, C, el tercer ordenador tiene virus

$$a)\ P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}9^3=0{,}729$$
$$b)\ 1-P(A\cap B\cap C)=1-0{,}729=0{,}271$$
$$c)\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$$
$$=3\cdot 0{,}9-3\cdot 0{,}9^2+0{,}9^3=0{,}561$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$, donde 1-$\alpha$ es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 3,5; σ la desviación típica, ahora 1; n el tamaño de la muestra, 100.

$1-\alpha=0{,}97\Rightarrow\alpha=0{,}03\Rightarrow\alpha/2=0{,}015\Rightarrow z_{\alpha/2}=2{,}17$ ya que $(1-0{,}015=0{,}985)$ .Ver tabla

a)Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(3{,}5-2{,}17\frac{1}{\sqrt{100}}\ ,\ \ 3{,}5+2{,}17\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=(3{,}28\ ,\ 3{,}72)$$

b) Si queremos obtener un intervalo de anchura menor manteniendo el nivel de confianza podemos aumentar el tamaño de la muestra; esto hace disminuir el radio del intervalo porque hace aumentar el denominador de la fracción que aparece en él.

Propuesta B

1. *a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $-7 \cdot I - 5 \cdot X + A \cdot X = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad). (0.75 ptos)*

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)

2. *Una floristería elabora, para el día de la madre, tres tipos de centros florales: tipo I, tipo II y tipo III, que llevan margaritas, gerberas y liliums, en las siguientes cantidades:*

	Tipo I	*Tipo II*	*Tipo III*
Margaritas	*12*	*4*	*8*
Gerberas	*10*	*15*	*5*
Liliums	*3*	*6*	*12*

Si se dispone de 100 margaritas, 125 gerberas y 75 liliums:

a) Plantea el sistema que permita averiguar cuántos centros florales de cada tipo se podrán elaborar utilizando todas las flores disponibles. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x = 1 \\ (x-2)^2 + 2 & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en $x = 1$. (0.5 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 ptos)

4. *El ruido, medido en decibelios, producido por la música y los clientes en un local nocturno, se ajusta a la función: $R(t) = -4t^2 + 24t + 54$, siendo t el tiempo medido en horas, $0 \leq t \leq 6$.*

a) En la primera hora ($t = 1$), ¿cuántos decibelios se registraron? (0.25 puntos)

b) ¿En qué momento se produce mayor ruido y a cuántos decibelios asciende? (1.25 puntos)

5. *En un temario para la oposición a una plaza, hay 25 temas de los cuáles 5 son de legislación y el resto del contenido propio de la plaza. Cada opositor elige al azar dos temas. Obviamente el mismo tema no puede salir dos veces.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de los dos temas elegidos ninguno sea de legislación? (0.75 ptos)

b) Si un opositor ha estudiado 10 temas de los 25, ¿cuál es la probabilidad de que de los dos temas escogidos al menos uno sea de los que ha estudiado ? (0.75 ptos)

6. *En un centro de investigación, se está estudiando el tiempo de eliminación de una toxina en la sangre mediante un fármaco. Se sabe que el tiempo de eliminación de esta toxina sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 6 horas. Se toma una muestra aleatoria de 10 pacientes y se concluye que el tiempo que tardan en eliminar dicha toxina es: 39, 41, 42, 44, 48, 50, 53, 54, 59 y 60 horas respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de eliminación de dicha toxina con un nivel de confianza del 97 %. (1.25 puntos)

b) ¿Cuál debería ser como mínimo el tamaño de la muestra, para que el error máximo admisible de estimación de la media sea inferior a 2 horas, con un nivel de confianza del 97 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

B1.- Solución

$$-7\cdot I-5\cdot X+A\cdot X=B\Rightarrow(-5\cdot I+A)X=B+7\cdot I\Rightarrow X=(-5\cdot I+A)\cdot(B+7\cdot I)$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix}3&0\\-3&-1\end{pmatrix};\quad X\cdot A=I\Rightarrow X=A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{transpuesta de adjuntos}\right)=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1&0\\3&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1/3&0\\-1&-1\end{pmatrix}$$

B2.- Solución

Llamaremos x al nº de centros de tipo I, y al nº de centros de tipo II y z al nº de centros tipo III

$$\begin{cases}12x+4y+8z=100\\10x+15y+5z=125\\3x+6y+12z=75\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1^{a}\text{ por -1 mas }3^{a}\text{ por4}\\-12x-4y-8z=-100\Rightarrow 20y+40z=200\Rightarrow y+2z=10\\12x+24y+48z=300\end{cases}$$

$$\begin{cases}1^{a}\text{ dividida por 4, }2^{a}\text{ dividida por 5}\\3x+y+2z=25\\2x+3y+z=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+2y+4z=50\\-6x-9y-3z=-75\end{cases}\Rightarrow -7y+z=-25$$

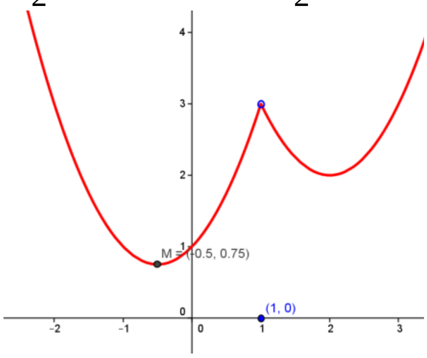
$$\begin{cases}y+2z=10\\-7y+z=-25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7(10-2z)+z=-25\Rightarrow z=3\\y=10-6=4\end{cases}\Rightarrow x=\frac{25-12-3}{2}=5$$

B3.- Solución

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1\ si\ x<1\\0\ si\ x=1\\(x-2)^2+2\quad si\ x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=0\\\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2+x+1=3\\\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-2)^2+2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{No es continua en x}=1\\0\neq3\end{cases}$$

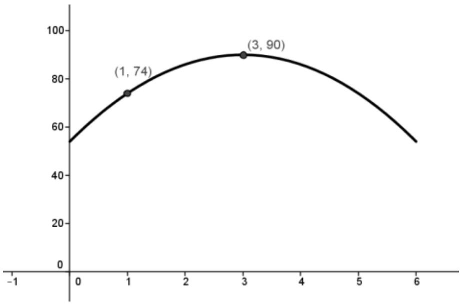
$$\text{En }(-\infty,1)\Rightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=0\text{ cuando }x=-\frac{1}{2}\\f''(x)=2\end{cases}\Rightarrow\text{Mínimo en }(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2})=(\frac{-1}{2},\frac{3}{4})$$

$$\text{Luego decreciente de }(-\infty,-\frac{1}{2})\text{ y creciente de }(-\frac{1}{2},1)$$



B4.- Solución

$$\begin{cases} R(t) = -4t^2 + 24t + 54 \\ 0 \le t \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a) R(1)(= -4 + 24 + 54 = 74 \text{ decibelios} \\ b) \begin{cases} R'(t) = -8t + 24 \Rightarrow \begin{cases} R'(t) = 0 \\ -8t + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 3 \\ R''(t) = -8 \Rightarrow R''(3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{Máximo en } (3, \mathrm{R}(3)) = (3{,}90) \end{cases} \end{cases}$$



B5.- Solución

Llamemos 1nL al suceso “el primer tema elegido al azar no es de legislación” y 2nL al suceso “el segundo tema elegido al azar no es de legislación”. 1_{10} “el primer tema elegido al azar es de los 10 estudiados”, 2_{10} “el segundo tema elegido al azar es de los 10 estudiados”

$$a) P(1nL \cap 2nL) = P(1nL) \cdot P(2nL / 1nL) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{19}{30} = 0{,}63...$$

$$b) P(1_{10} \cup 2_{10}) = P(1_{10}) + P(2_{10}) - P(1_{10} \cap 2_{10}) = \frac{10}{25} + \frac{9}{24} - \frac{10}{25}\frac{9}{24} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-$\alpha$ es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 49 horas; σ la desviación típica, ahora 6; n el tamaño de la muestra, 10.

$1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \alpha / 2 = 0{,}015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$ ya que $(1 - 0{,}015 = 0{,}985)$ .Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(49 - 2{,}17\frac{6}{\sqrt{10}} \ , \ 49 + 2{,}17\frac{6}{\sqrt{10}}\right) = (44{,}88 \ , \ 53{,}12)$$

b) El error viene dado por el radio del intervalo de confianza

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 2{,}17 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow n > (2{,}17 * 3)^2 \Rightarrow n = 43$$