Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2013)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *Considera el siguiente problema de programación lineal:*

Maximiza la función $z = 2x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{lcl} x - y & \leq & 1 \\ x + y & \leq & 2 \\ x \geq 0 & & \\ y \geq 0 & & \end{array}$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. *Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, unos estudiantes han vendido camisetas, bufandas y gorras a 10, 5 y 7 euros respectivamente. Han recaudado en total 2980 euros. El número total de prendas vendidas ha sido 380. El número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita obtener el número de camisetas, bufandas y gorras que se vendieron. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} |-x-1| - t & si\ x \leq 2 \\ x - 5 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 2$. (0.5 ptos)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

4. *Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto (2, 1). (1.5 puntos)*

5. *En una empresa se producen dos tipos de piezas: A y B. El 20 % son piezas del tipo A y el 80 % piezas del tipo B. La probabilidad de que una pieza de tipo A sea defectuosa es 0.02 y de que una pieza de tipo B sea defectuosa es 0.1.*

a) Elegida una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? (0.75 puntos)

b) Se escoge al azar una pieza y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo A? (0.75 puntos)

6. *Se considera una muestra aleatoria de 10 consumidores mayores de edad, que en las rebajas de invierno gastaron: 65, 72, 74, 75, 80, 81, 82, 84, 87 y 90 euros respectivamente.*

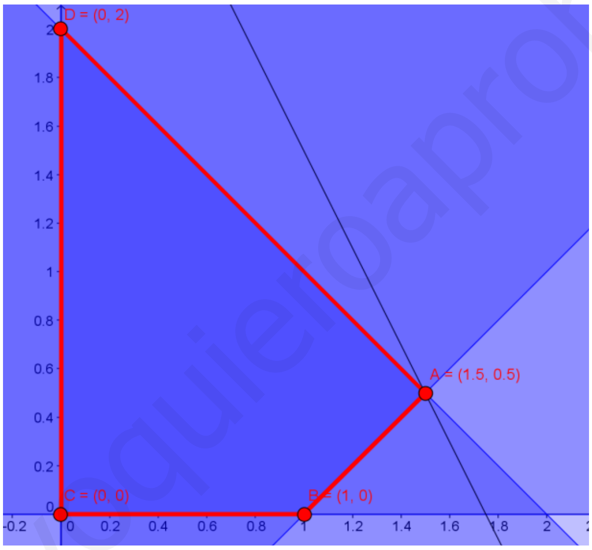
a) Sabiendo que el gasto por persona, en las rebajas de invierno, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ euros, halla un intervalo de confianza para el gasto medio poblacional con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 puntos)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo con el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

$$\begin{cases} x-y\le 1 \\ x+y\le 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+2 \end{cases} \Rightarrow x-1=-x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=1{,}5 \\ y=0{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-x+2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x-1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$



Luego el máximo de z se encuentra en el vértice A(1.5 , 0.5) y es max z=2*1.5+0.5=3.5

A2.- Solución:

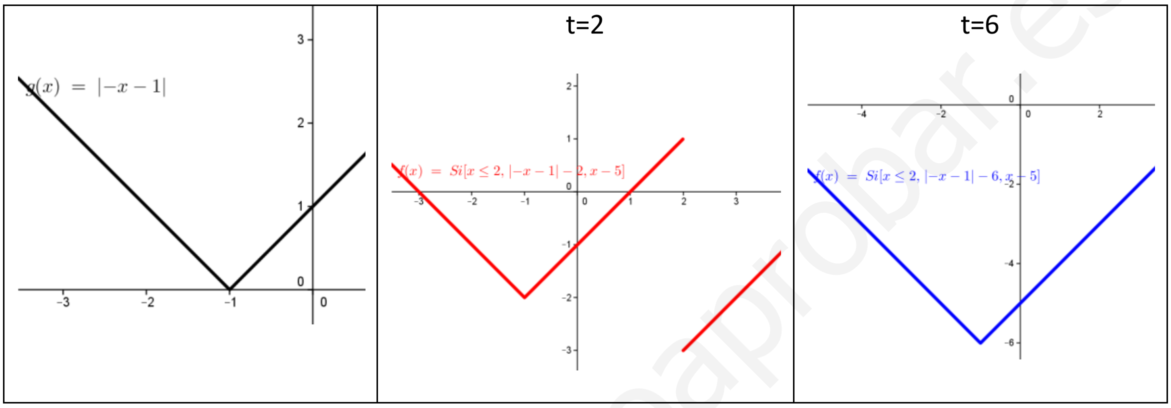
Llamamos c al número de camisetas pedido, b al número de bufandas y g al número de gorras.

$$\begin{cases} 10c+5b+7g=2980 \\ c+b+g=380 \\ c=2g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 20g+5b+7g=2980 \\ 2g+b+g=380 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27g+5b=2980 \\ 3g+b=380 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27g+5b=2980 \\ -15g-5b=-1900 \\ ----------- \\ 12g=1080 \\ g=90 \end{cases} \\ b=110 \\ c=180 \\ \text{Aquí están el planteamiento y la solución} \end{cases}$$

A3.- Solución:

$$a)\, f(x)=\begin{cases}|-x-1|-t & si\ x\le 2\\ x-5 & si\ x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2)=|-2-1|-t=3-t\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}|-x-1|-t=3-t\Rightarrow\begin{cases}\text{Para continua en x = 2}\\ 3-t=-3\Rightarrow t=6\end{cases}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x-5=-3\end{cases}$$

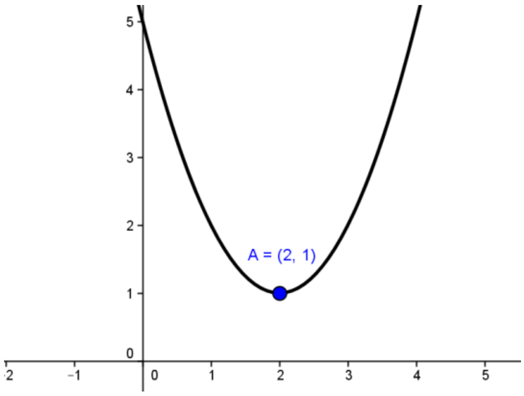
Si t=2 no es continua y su gráfica es una especie de v y una semirrecta. Ver gráficos



A4.- Solución:

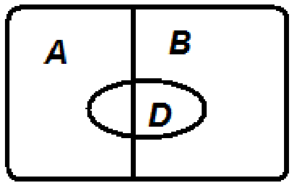
Si en un punto se anula la derivada primera y la segunda es positiva entonces hay un mínimo.

$$f(x)=x^2+ax+b\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=2x+a\Rightarrow\begin{cases}\text{como por mínimo } f'(2)=0\\ \text{y como } f'(2)=4+a\end{cases}\Rightarrow a=-4\\ f''(x)=2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow b=5\\ f(2)=1\Rightarrow 4+2a+b=1\Rightarrow 2a+b=-3\Rightarrow b=-3-2a\end{cases}$$



A5.- Solución:

Consideremos los sucesos: A elegir al azar y ser del tipo A, B elegir al azar y ser del tipo B y D elegir al azar y ser defectuosa. Sabemos que p(A)=0,2. p(B)=0,8 y también:



a) $p(D/A) = 0{,}02,\ p(D/B) = 0{,}1$ Entonces:

$$\begin{cases} P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) \\ P(D/A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) = 0{,}02 * 0{,}2 + 0{,}1 * 0{,}8 = \underline{0{,}084} \Rightarrow$$
$$p(nD) = 1 - p(D) = 0{,}916$$

b) $P(A/nD) = \dfrac{P(A \cap nD)}{P(nD)} = \dfrac{P(A)P(nD/A)}{P(nD)} = \dfrac{0{,}2 * 0{,}98}{0{,}916} = \dfrac{0{,}196}{0{,}916} = \underline{0{,}214}$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, calculamos la media de los 10 datos y es 79; σ la desviación típica, ahora 20; n el tamaño de la muestra, 10.

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1 - 0{,}025 = 0{,}975)$ .Ver tabla

a)Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(79 - 1{,}96 \frac{20}{\sqrt{10}}\ ,\ 79 + 1{,}96 \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = (66{,}60\ ,\ 91{,}40)$$

b) Si queremos obtener un intervalo de anchura menor manteniendo el nivel de confianza podemos aumentar el tamaño de la muestra; esto hace disminuir el radio del intervalo porque hace aumentar el denominador de la fracción que aparece en él.

Propuesta B

1. *Dadas las matrices:* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M = (3 \cdot I + A^2)$*, donde* I *es la matriz identidad de orden 3. (0.75 ptos)*

b) Calcula la matriz X *tal que* $X \cdot B = I$*, donde* I *es la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)*

2. *Una empresa produce tres tipos de bicicletas: de montaña, de paseo y estáticas. Para su fabricación cada bicicleta necesita piezas de acero, aluminio y fibra de carbono en las cantidades que se indican en la tabla siguiente:*

	Bicicleta de montaña	*Bicicleta de paseo*	*Bicicleta estática*
Piezas de acero	*2*	*3*	*1*
Piezas de aluminio	*6*	*4*	*6*
Piezas de fibra de carbono	*8*	*6*	*6*

Si se dispone de 9 piezas de acero, 28 piezas de aluminio y 34 piezas de fibra de carbono:

a) Plantea el sistema que nos permita obtener el número de bicicletas de cada tipo que se podrán fabricar utilizando todas las piezas. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} |x - t| & si\ x \leq 2 \\ (x-3)^2 - 1 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en* $x = 2$*? (0.5 ptos)*

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ *en el intervalo* $(2, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ *en* $(2, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

4. *En un tramo de una montaña rusa, la altura alcanzada por el vagón, medida en metros, se ajusta a la función* $f(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 38$*, siendo* t *el tiempo medido en segundos,* $0 \leq t \leq 6$.

a) ¿En qué instante t*, el vagón alcanza la altura máxima en ese tramo, y cuál es dicha altura? (1 punto)*

b) ¿En qué instante t*, el vagón alcanza la altura mínima en el tramo mencionado, y cuánto vale dicha altura? (0.5 puntos)*

5. *En un colegio el 30 % de los alumnos juegan al baloncesto, el 40 % juegan al fútbol, y el 50 % juegan al fútbol o al baloncesto o a ambos deportes.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol y juegue al baloncesto? (0.75 puntos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol? (0.75 puntos)

6. *Una fábrica produce cables de acero, cuya resiliencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 10\ \ KJ/m^3$*. Se tomó una muestra aleatoria de 100 piezas y mediante un estudio estadístico se obtuvo un intervalo de confianza (898.04 , 901.96) para la resiliencia media de los cables de acero producidos en la fábrica.*

a) Calcula el valor de la resiliencia media de las 100 piezas de la muestra. (0.75 puntos)

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (1.25 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución:

$$a)\begin{cases} A^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&1\\5&8&5\\2&-1&2\end{pmatrix};\ 3I=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\\ M=3I+A^2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-4&1\\5&8&5\\2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4&1\\5&11&5\\2&-1&5\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$b)\begin{cases} X\cdot B=I\Rightarrow X=B^{-1}, \text{para hallarla usamos la traspuesta de adjuntos por } 1/|\mathrm{B}|\\ B^{-1}=\dfrac{-1}{5}\begin{pmatrix}0&-1\\-5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/5\\1&1/5\end{pmatrix}\end{cases}$$

B2.- Solución:

Llamaremos m al número de bicicletas de montaña pedido, p al número de bicicletas de paseo y e al número de bicicletas estáticas. El planteamiento y la solución son los siguientes:

$$\begin{cases}2m+3p+e=9\\6m+4p+6e=28\\8m+6p+6e=34\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{La 1ª por 6 menos la segunda y la tercera menos la 2ª}\\6\mathrm{m}+14\mathrm{p}=26\\2\mathrm{m}+2\mathrm{p}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{la 1ª menos } 3*2^{\text{a}}\\8\mathrm{p}=8\\\mathrm{p}=1\end{cases}$$

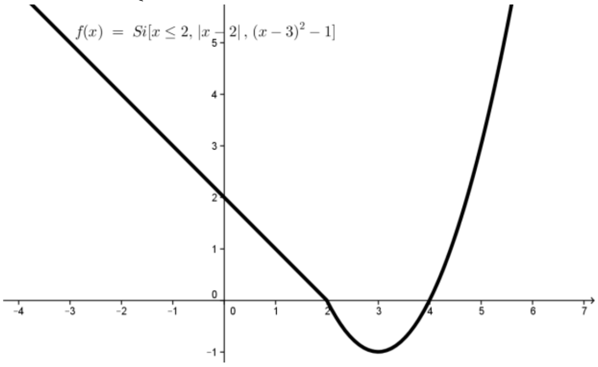
$$m=3-p\Rightarrow m=2$$

$$e=9-4-3=2$$

B3.- Solución:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}|x-t| & si\ x\le 2\\(x-3)^2-1 & si\ x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2)=|2-t|\\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}|x-t|=|2-t|\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(x-3)^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{Para continua en x}=2\\|2-t|=0\Rightarrow t=2\end{cases}$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}|x-2| & si\ x\leq 2\\(x-3)^2-1 & si\ x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{El primer trozo es una semirrecta}\\\text{El segundo un trozo de parábola}\Rightarrow f'(x)=2x-6\Rightarrow f''(x)=2>0\\f'(x)=0\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3,\text{ luego en }(3,f(3))=(3,-1)\text{ hay mínimo}\\\text{c) De 2 a 3 es decreciente y de 3 a infinito es creciente. Ver gráfica.}\end{cases}$$

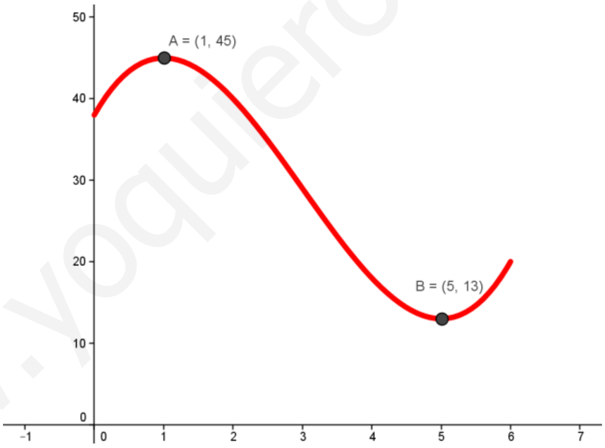


B4.- Solución:

Si la derivada primera es 0 y la segunda negativa hay máximo y si la primera es 0 y la segunda positiva hay mínimo. Hallaremos esos puntos.

$$f(t)=t^3-9t^2+18t+38\Rightarrow f'(t)=3t^2-18t+18\Rightarrow f''(t)=6t-18$$

$$f'(t)=0\Rightarrow 3t^2-18t+18=0\Rightarrow\begin{cases}t=1\Rightarrow f''(1)=6-18<0\Rightarrow máximo(1seg,45metros)\\t=5\Rightarrow f''(5)=30-18>0\Rightarrow mínimo(5seg,13metros)\end{cases}$$



B5.- Solución:

Llamemos B al suceso el alumno elegido juega al baloncesto y F al suceso juega al futbol

$$a)\ p(F\cap B)=p(F)+p(B)-P(F\cup B)=30\%+40\%-50\%=20\%$$

$$b)\ p(F/B)=\frac{p(F\cap B)}{p(B)}=\frac{20\%}{30\%}=66{,}66\%$$

B6.- Solución:

El intervalo dado corresponde a la fórmula siguiente, donde σ=10 y n=100, $\bar{x}$ la media pedida

$$a)\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{10}{\sqrt{100}}=898{,}04\\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{10}{\sqrt{100}}=901{,}96\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{898{,}04+901{,}96}{2}=\underline{900}\\ z_{\alpha/2}=\dfrac{898{,}04-901{,}96}{2}=1{,}96\end{cases}$$

$$b)z_{\alpha/2}=1{,}96\Rightarrow\alpha/2=0{,}025\Rightarrow\alpha=0{,}05\Rightarrow1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\underline{\text{Intervalo de confianza al 95\%}}$$