**Evaluación para el Acceso a la Universidad**
**Convocatoria de 2019**
**Materia:**
**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**
**El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.**
**Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.**

## Propuesta A

**1.** *Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.*

*a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco (1.5 ptos)*

*b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)*

**2.** *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función* $f(x, y) = 3x + 4y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*
$x + y \geq 2 \quad ; \quad x \leq y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2 \quad ; \quad x \geq 0$

*a) Dibuja la región factible. (1 pto)*

*b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)*

*c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)*

**3.** *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & si\ x \leq c \\ (x-2)^2 + 3/2 & si\ x > c \end{cases}$

*a) ¿Para qué valor de c la función* $f(x)$ *es continua en* $x = c$*? (0.5 ptos)*

*b) Para* $c = 1$*, representa gráficamente la función f. (1 pto)*

**4.** *La función* $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ *nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus*

*a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. (0.5 ptos)*

*b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. (0.5 ptos)*

*c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? (0.5 ptos)*

**5.** *En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.*

*a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)*

*b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? (0.75 ptos)*

**6.** *Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del kétchup se distribuye según una ley normal de desviación típica* $\sigma = 10$ *gramos, se pide:*

*a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup. (1 pto)*

*b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza (0.5 ptos)*

*c) ¿Crees que la media poblacional* $\mu$ *del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

## Propuesta B

**1.** *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, *encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten. (1.5 ptos)*

**2.** *Se reparten tres tipos de becas:* $B_1$ *por valor de 400 euros,* $B_2$ *de 160 euros y* $B_3$ *de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca* $B_1$ *es 5 veces mayor que la que obtiene la beca* $B_2$*:*

*a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. (1.5 ptos)*

*b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)*

**3.** *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & si\ x \leq -1 \\ (x-t)^2 & si\ x > -1 \end{cases}$

*a) ¿Para qué valor de t la función* $f(x)$ *es continua en x=-1? (0.5 ptos)*

*b) Para* $t = 3$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(-1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

*c) Para* $t = 3$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(-1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

**4.** *Sea la función* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$*. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abcisa* $x = 0$*, un máximo en* $x = 1$ *y la pendiente de la recta tangente en* $x = -1$ *es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* $a, b$ *y c. (1.5 ptos)*

**5.** *En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

*a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 ptos)*

*b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 ptos)*

**6.** *El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 2$ *minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

*a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)*

*b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (1 pto)*

| **z** | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |

**1A.- Solución:**

Llamemos $P$ al peso en kilos de un saco pequeño, $M$ al peso de un saco mediano y G al peso de un saco grande que vale un bocadillo

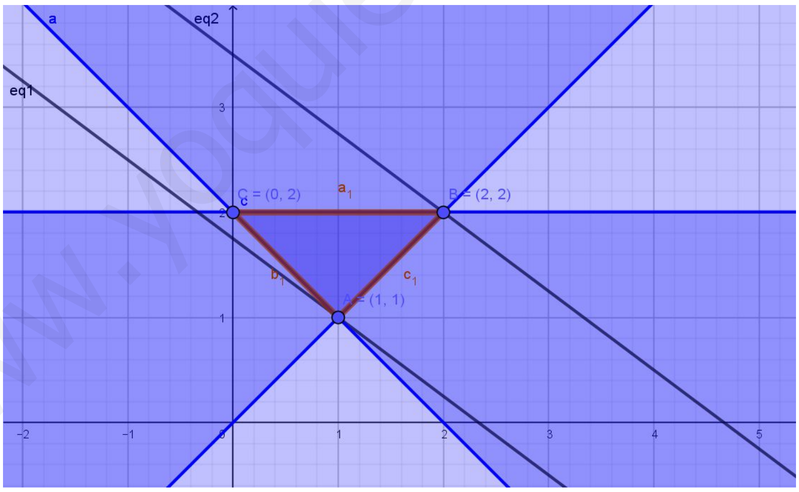
$$a)\begin{cases}20P+14M+6G= \quad 1800\\ \quad 2P+3M= \qquad 2G\\ G=4P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{Sustituimos la 3}^{\text{a}}\text{ en la 1}^{\text{a}}\text{ y en la 2}^{\text{a}}\\ 20\text{P}+14\text{M}+24\text{P}=1800\\ 2\text{P}+3\text{M}=8\text{P}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}44P+14M=1800\\ -6P+3M=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M=2P\\ 44P+28P=1800\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}72P=1800\Rightarrow P=25\ kg\\ M=50\ kg\\ G=100\ kg\end{cases}$$

**2A.- Solución**:

Las restricciones que definen la región factible son $\begin{cases}x+y\geq 2\\ x\leq y\\ y\geq 0\\ y\leq 2\\ x\geq 0\end{cases}$ Región que queda reflejada a escala en el dibujo. Los vértices los obtenemos como intersección de cada dos rectas que la limitan

La función $f(x,y)=3x+4y$ alcanza el máximo en el vértice (2 , 2) donde $f$(2,2)=14 y el mínimo en (1 , 1) donde $f$(1,1)=7



**3A.- Solución:**

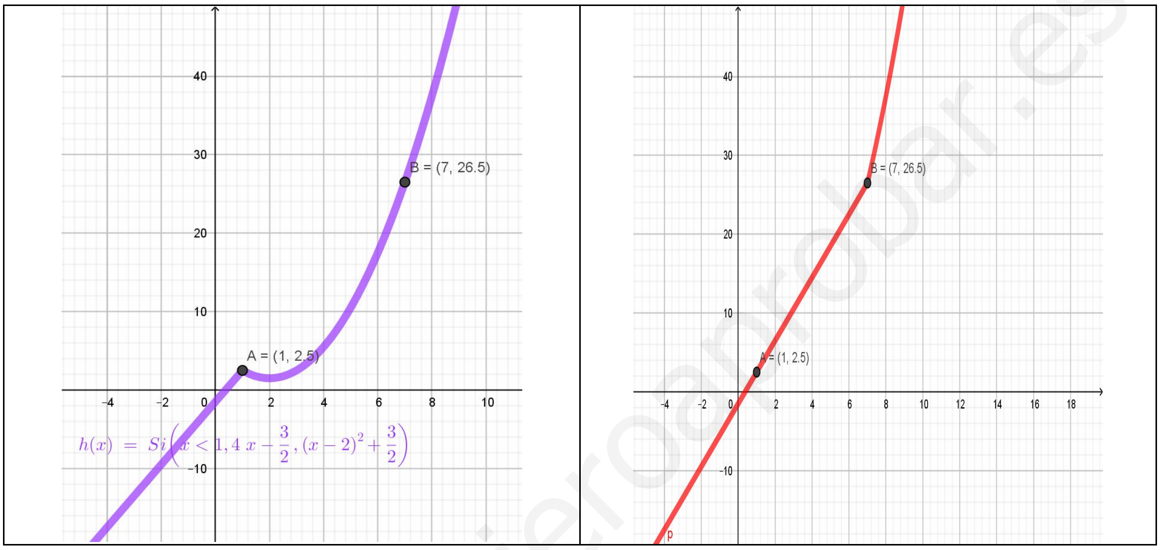
Para ser continua en *c* debe existir *f(c)* y los límites por la derecha y por la izquierda cuando *x* tiende a *c* deben coincidir

$$a)\ \lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^-} 4x-\frac{3}{2}=4c-\frac{3}{2}=\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^+}(x-2)^2+\frac{3}{2}=(c-2)^2+\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$4c-\frac{3}{2}=(c-2)^2+\frac{3}{2}\Rightarrow (c-2)^2-4c+3=0\Rightarrow c^2-8c+7=0\Rightarrow\begin{cases}c=7\\ c=1\end{cases}$$

Luego es continua cuando *c=7* y cuando *c=1*

b) Para *c=1* se trata de una semirrecta de pendiente 4 y ordenada en el origen 1'5 y un trozo de la parábola de vértice en (2 , 1'5). Ver gráfica en morado.




**4A.- Solución**

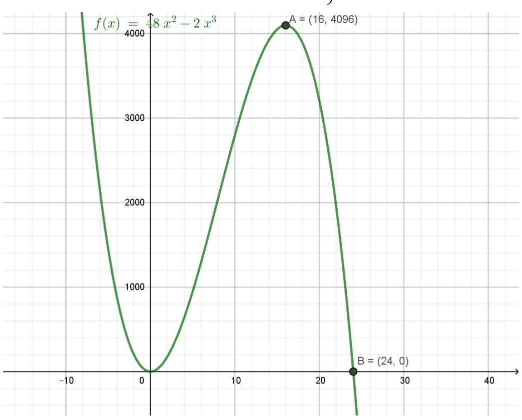
El virus dejará de propagarse cuando ningún ordenador esté afectado, por tanto

$$a)\ v(t)=0\Rightarrow 48t^2-2t^3=0\Rightarrow 2t^2(24-t)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=24\end{cases}\Rightarrow \text{Deja de propagarse a la 24 horas}$$

$$b)\ v'(t)=96t-6t^2\Rightarrow\begin{cases}v'(t)=0\Rightarrow t(96-6t)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t=16\Rightarrow\begin{cases}v''(0)>0\Rightarrow \text{Mínimo en } (0,0)\\ v''(16)<0\Rightarrow \text{Máximo en } (16,4096)\end{cases}\end{cases}\\ v''(t)=96-12t\end{cases}$$

Aumenta de 0 a las 16 horas y disminuye de las 16 a las 24 en que desaparece.

*c*) A las 16 horas hay 4096 ordenadores infectados, es el máximo.



**5A.- Solución:**

Llamaremos C al suceso "elegido un crédito al azar resulta ser para compra de casa"
NC al suceso "….. otra cosa que no sea casa". I al suceso "…. impagado".
P al suceso "… pagado"

$$a)\ P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap NC) = P(C).P(I/C) + P(NC).P(I/NC) = 5\%.40\% + 95\%.10\%$$

$$= 11'5\% \Rightarrow P(P) = 88'5\%$$

*b*) Si el 40 % de los creditos de casa son impagados entonces el 60% de los de casa son pagados

$$P(C/P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{P(C).P(P/C)}{P(P)} = \frac{5\%.60\%}{88'5\%} = \frac{300\%}{88'5} = 3'38\%$$

**6A.- Solución:**

a) Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$p\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza, (en nuestro caso 0,97). $\bar{x}$ la media de la muestra , en nuestro caso 84, σ la desviación típica 10 y n el tamaño de la muestra 10

$1-\alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha/2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$. Ya que 1-0,015=0,985 (ver tabla).

Luego el intervalo pedido es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (77'13\ ,\ 90'86)$

b) Si queremos mantener el nivel de confianza y que el intervalo sea menor, debemos aumentar el tamaño de la muestra porque así disminuimos el radio del intervalo, ya que, como vemos en la formula al aumentar *n* disminuye el radio= $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

c) Si volvemos a calcular el intervalo de confianza para $1-\alpha = 0,985$ nos dará uno más amplio que el anterior y si antes pertenecía el 85, también pertenecerá en este. Luego la respuesta es sí.

**B1.- Solución:**

a) Para que conmuten A.B=B.A

$$\begin{cases} A\cdot B = \begin{pmatrix} 1+3a & 5+3b \\ 3+a & 15+b \end{pmatrix} \\ B\cdot A = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ a+3b & 3a+b \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+3a=16 \\ 5+3b=8 \\ 3+a=a+3b \\ 15+b=3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases} \text{Comprobación } A.B = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = B.A$$

**B2.- Solución:**

Llamaremos x al número de personas que reciben la becas tipo B1, y al número de las que reciben B2 y z al número de las que reciben B3.

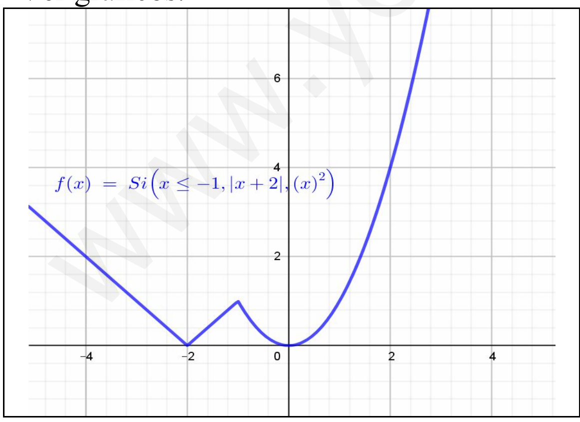
$$a)\begin{cases} 400x+160y+200z=43400 \\ x+y+z=145 \\ x=5y \end{cases} \Rightarrow b)\begin{cases} \text{Sustituimos la 3}^{\text{a}} \text{ en la 1}^{\text{a}} \text{ y en la 2}^{\text{a}} \\ 2000y+160y+200z=43400 \\ 5y+y+z=145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 216y+20z=4340 \\ 6y+z=145 \end{cases}$$

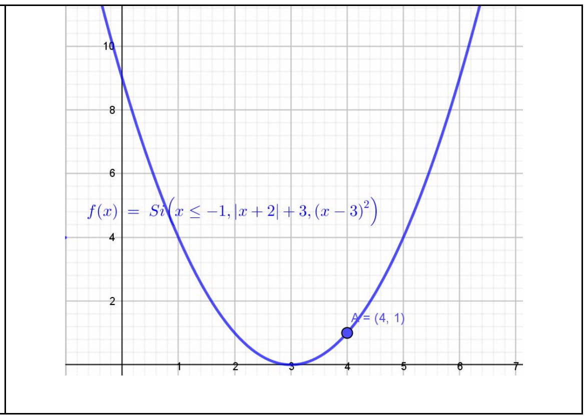
$$\begin{cases} 216y+20z=4340 \\ -120y-20z=2900 \end{cases} \Rightarrow \{96y=1440 \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1440}{96}=15 \text{ personas con beca B2} \\ z=145-6y \Rightarrow z=145-90=55 \text{ personas con beca B3} \\ x=5y \Rightarrow x=75 \text{ personas con beca B1} \end{cases}$$

**B3.- Solución:**

$$\begin{cases} f(-1)=\left|-1+2\right|+t=1+t \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1+t=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=(-1-t)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+t=(1+t)^2 \Rightarrow 1=1+t \Rightarrow t=0 \\ f(-1)=1 \end{cases}$$

*Si* $t=3$ *en* $(-1,\infty)$ $f(x)=(x-3)^2$ *que es un trozo de la* parábola con vértice en (3,0) y que pasa por (4,1). Luego tiene un mínimo en (3,0), decrece de -1 a 3 y crece de 3 a infinito. Ver gráficos.



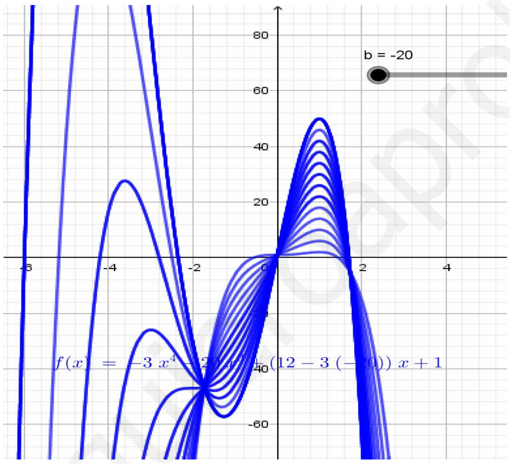



**B4.- Solución:**

$$\begin{cases} f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1 \\ f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c \\ f''(x) = 12ax^2 + 6bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P.I.(0,1) \Rightarrow \{ f''(0) = 0 \\ \text{Máximo en x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'1) = 0 \\ 4a + 3b + c = 0 \end{cases} \\ \text{Tangente en x = -1 vale 24} \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 24 \\ -4a + 3b + c = 24 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = -24 \\ a = -3 \\ 6b + 2c = 24 \\ c = 12 - 3b \end{cases}$$

Luego hay muchas funciones que cumplen lo pedido

$$\begin{cases} f(x) = \text{-}3x^4 + bx^3 + (12 - 3b)x + 1 \\ \text{Para máximo en x} = 1 \; f''(x) < 0 \Rightarrow -36 + 6b < 0 \Rightarrow b < 6 \\ \text{En el gráfico podemos ver unas cuantas.} \end{cases}$$




**B5.- Solución:**

Calculamos la probabilidad de que la primera no sea para Albacete y la de que la segunda tampoco lo sea

$$a)\ P(1^a\, nA \cap 2^a\, nA) = \frac{13}{27} \cdot \frac{13}{27} = 0{,}2318$$

$$b)\ P(1^a C \cap 2^a C \cdots \cap 5^a C) = \frac{5}{27} \cdot \frac{4}{26} \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{23} = \frac{120}{9687600} = 0'0000123$$

**B6.- Solución:**

a) Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:
$p\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza, (en nuestro caso 0,95). $\bar{x}$ la media de la muestra , en nuestro caso 10'3, σ la desviación típica 2 y n el tamaño de la muestra 10

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$. Ya que 1-0,025=0,975 (ver tabla).

Luego el intervalo pedido es $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (9'06\,,11'53)$

b) El error es el radio del intervalo de confianza

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 1'96\frac{2}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow \sqrt{n} > 3'92 \Rightarrow n > 3'92^2 \Rightarrow n = 16$$